



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه دوازدهم



نیم سال اول دوازدهم $\frac{2}{8}$

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

پایه یازدهم $\frac{1}{5}$

☐	☐	☐	☐	☐	☐
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۷ آذرماه ۱۴۰۴

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دیس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	مهرداد کیوان - حسین شفیع زاده کیوان دارابی - رسول حاجی زاده	مهرداد اسپیدکار مائده بادن فیروز حمیدرضا ولی پور - مهران جعفری علیرضا ملک حسینی
فیزیک	سجاد صادقی زاده سعید احمدی	سعید احمدی - سجاد صادقی زاده حسین عبدوی نژاد - محمد جواد سورچی مهدی پارسا - زهره آقامحمدی - سارا قانع محسن قندچلر - حسین زین العابدین زاده مجید رجبی وندچالی - مهدی رحمت اللهی امیر حسین اکبری - علیرضا سامان حامد نبی منصور	حامد نبی منصور فاطمه شفاخواه
شیمی	فرشاد هادیان فرد	فرشاد هادیان فرد - بهمن بازرگانی مهسا بایمانی نژاد - طاهای حق بین عالیه میرزایی - فرهنگ امیری	فرهنگ امیری - طاهای حق بین رامین رزمجو امیرعلی حسینی فرد

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان

نازنین امیری

مائده بادن فیروز

زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

چگونه مرور کنیم؟ سه مرحله‌ای تا حفظ پایدار

در مقاله‌های قبل گفتیم که «مرور» یک کار اضافه و حاشیه‌ای نیست؛ خودش بخش اصلی یادگیریه. خیلی از غلط‌های ما توی آزمون، مربوط به سؤال‌هایی‌ان که قبلاً بلد بودیم اما از ذهنمون سر خوردن و فراموش شدن؛ یعنی فهم اتفاق افتاده، اما ذخیره‌سازی کامل نشده. همینجاست که مرور درست وارد بازی می‌شه: هم کاری می‌کنه زحمتی که برای مطالعه کشیدی واقعاً ثبت بشه، هم باعث می‌شه عملکردت توی آزمون دقیقاً همون چیزی باشه که خوندی، نه کمتر.

یادداشت برداری؛ مهم‌ترین ابزار مرور

یادداشت‌ها چکیده‌ای از چیزهایی هستن که برات **سخت**، **فرار** یا **پرتکرار** بودن.

چرا این قدر مؤثرن؟

- چون وقتی با «زبان خودت» می‌نویسی، همون نظم ذهنی رو منتقل می‌کنی که باهاش یاد گرفتی.
 - **مرورش سریع‌تره**؛ چشم تو نوشته‌های خودتو خیلی راحت‌تر می‌خونه.
 - و مهم‌تر از همه: **۵ دقیقه مرور یادداشت‌ها = ۱۵ دقیقه مرور جزوه یا کتاب**.
- یادداشت درواقع دفترچه نیست؛ «نسخه فشرده فهم تو» هست.

همون چیزیه که مرور رو از یک کار سفت تبدیل می‌کنه به یک کار دقیق و سریع.

پادکست‌های شفاهی؛ مرور بدون نوشتن پشت میز

یک روش مدرن و کم‌هزینه برای مرور اینه که از یادداشت‌ها فایل صوتی بسازی.

چرا خوبه؟

■ مجبوری دوباره سازمان‌دهی کنی

چون مجبور می‌شی نکات رو مرتب، کوتاه و قابل فهم بگی؛ همین باعث میشه بفهمی کدوم بخش‌ها رو هنوز خوب یاد نگرفتی.

■ مرورت آزاد از میز و کتاب میشه

روی مبل، توی راه، قبل خواب، موقع خستگی... فقط هدفون بذار و بگذار صدای خودت نکات رو برات بازسازی کنه. اینجوری ساعت مطالعات بی‌دردسر زیاد میشه.

چند نکته ریز ولی مهم:

صدای واضح، جمله‌های کوتاه، مکث‌های کوچک، مثال‌های ساده، فایل‌های ۱۰-۱۵ دقیقه‌ای، و یک جمع‌بندی یک دقیقه‌ای در آخر.

لازم نیست صرفه‌ای باشه فقط نسخه شنیداری فهم تو باشه.

کی به کی مرور کنیم؟

مرور «هر وقت حسش بود» نیست؛ مغز زمان بندی خودش رو داره.

■ **مرور اول:** همون روز مطالعه (مهم ترین مرور)

اگر امروز ۹۰ دقیقه درس خوندی، فقط ۵-۱۰ دقیقه مرور شبانه جلوی فراموش شدن نصفش رو می گیره.

■ **مرور دوم:** هفته بعد (تثبیت دوباره)

این همون لحظه ای که مغز بخش زیادی از مطلب رو رها می کنه و اگه برنگردی، دوباره خوانی لازم میشه.

مرورهای بلندمدت:

با برنامه راهبردی آزمون انجام میشن؛

خودشون به موقع تو رو برمی گردونن سراغ مطالب تا تثبیت طولانی مدت شکل بگیره.

مرور یعنی اینکه قبل از اینکه مغز مطلب رو پرت کنه بیرون، دوباره بهش یادآوری کنی که
«این مهمه، خلش دارا»

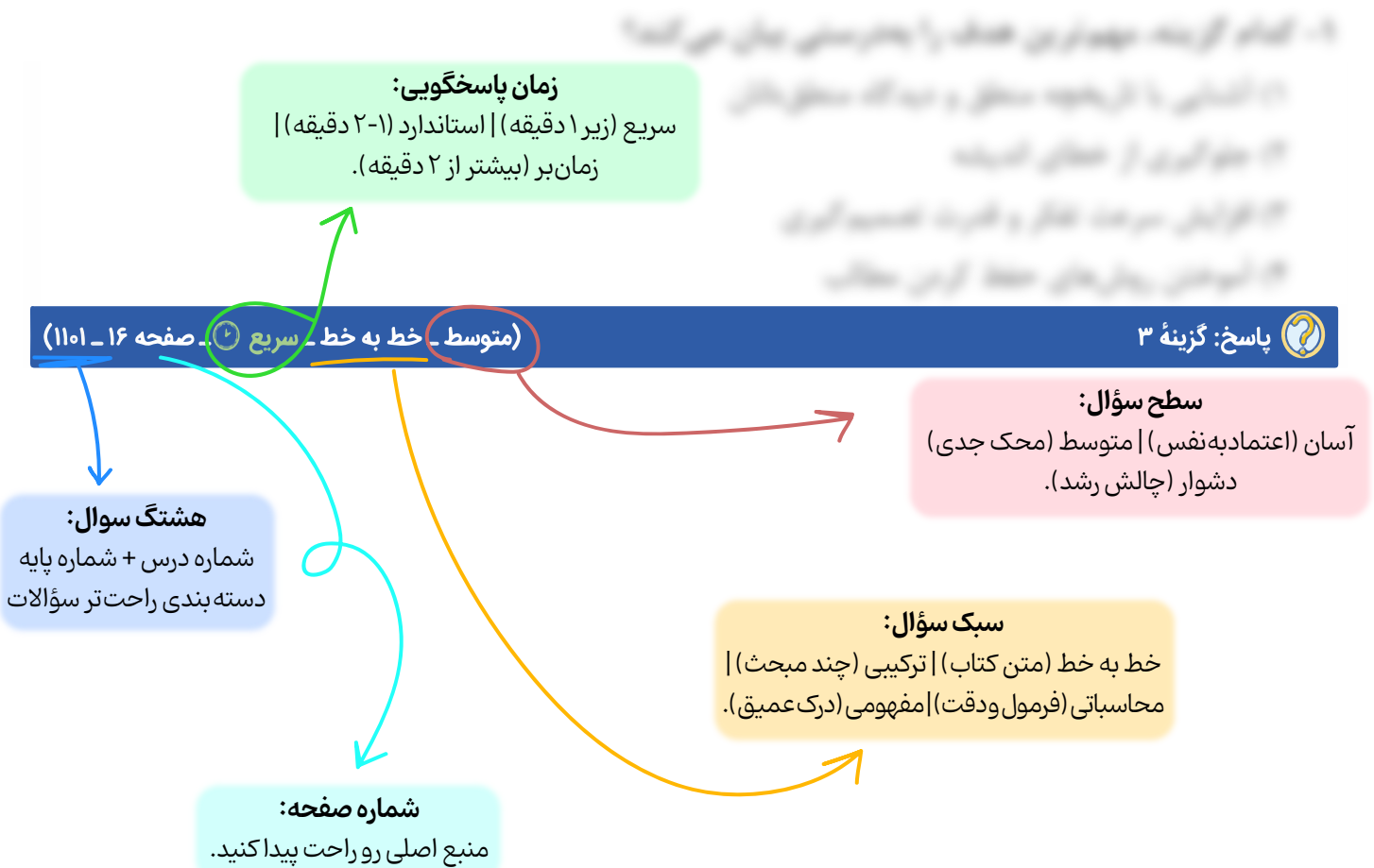
جمع بندی: چرخه سه تایی مرور

یک مرور مؤثر یعنی سه ابزار کنار هم:

- ۱) می نویسی ← فهم عمیق
- ۲) ضبط می کنی ← مرور راحت و سریع
- ۳) زمان بندی می کنی ← ماندگاری واقعی

اگر همین سه بخش رو نگه داری، هیچ مبحثی هدر نمی ره و یادگیریت از «مطالعه های فصلی و فزاین»
تبدیل میشه به «دانش همراه و پایدار»؛ همونی که روز از مون لازم داری.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!

یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!

پاسخنامه ویدئویی

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۲: حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت، صفحه‌های ۴۵ تا ۶۹
ریاضی پایه: الگو و دنباله، ریاضی ۱ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۷، حسابان ۱ صفحه‌های ۱ تا ۶
هندسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۶
هندسه پایه: دایره، هندسه ۲ (تا ابتدای حالت‌های دو دایره نسبت به هم) صفحه‌های ۹ تا ۲۰
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد (از ابتدای حل معادله سیاله) + گراف و مدلسازی، صفحه‌های ۲۶ تا ۴۲
آمار و احتمال: آمار استنباطی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۲۱، ریاضی ۱ صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۷۰

سهم در
کنکور

حسابان ۲: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۶ تست کنکور را پوشش داده است.
ریاضی پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۱۴ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۸ تست کنکور را پوشش داده است.
گسسته: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
آمار و احتمال: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

۱- اگر $f(x) = x^2 - 2x$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3 - f(x)}$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۱) ۱

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۴۹ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2x = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 - 1 = (-1)^+ = 3^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3 - f(x)} = \frac{1}{3 - 3^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

روش اول

ابتدا تابع $y = f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، ببینید:

$$f(x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)$$

حال به محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3 - f(x)}$ می‌پردازیم. ببینید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3 - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3 - (x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{-((x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{-(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{-(x-3)(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{-(1-3)(1+1)(1^{\pm}-1)^2} = \frac{1}{4(0^{\pm})^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

روش دوم

ابتدا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را محاسبه کنیم. از سمت راست شروع می‌کنیم یعنی ابتدا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، ببینید:

$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f(x) = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 - 1 = (\underbrace{1^{\pm} - 1}_{+})^2 - 1 = (-1)^+$$

حال $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، ببینید:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-1)^2 - 1 = ((-1)^+ - 1)^2 - 1 = ((-2)^+)^2 - 1 = 4^- - 1 = 3^-$$

حال به محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3 - fof(x)}$ می‌پردازیم، ببینید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3 - fof(x)} = \frac{1}{3 - 3^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

قلقشو یاد بگیر!

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} fog(x)$ کافی است از سمت راست شروع کنیم یعنی ابتدا $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ را محاسبه کنیم. فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ، حال $\lim_{x \rightarrow L} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

اگر $f(x) = [x] + 2$ و $g(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 6}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 1^+} (gof)(x)$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (gof)(x) \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + 2 = 3} \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{3+3}{2} = 3$$



۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2ax + k[-x]}{x^2 + ax + 6} = -\infty$ باشد، مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای k کدام است؟

(۴) -۲۶

(۳) -۲۴

(۲) -۱۷

(۱) -۱۵

(متوسط - ترکیبی - زمان ۵ دقیقه) - حسابان ۲ صفحه ۵۲ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

از آن جایی که حاصل حد در $x = 2$ برابر $-\infty$ است، پس $x = 2$ مخرج کسر را صفر می‌کند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2ax + k[-x]}{x^2 + ax + 6} = -\infty \Rightarrow 2^2 + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a + 10 = 0 \Rightarrow a = -5$$

به محاسبه حد راست در $x = 2$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-10x + k[-x]}{(x-2)(x-3)} = \frac{-20 + k(-3)}{0^-} = \frac{-20 - 3k}{0^-} = -\infty \Rightarrow -3k - 20 > 0 \Rightarrow 3k < -20 \Rightarrow k < -\frac{20}{3} \quad (I)$$

حال به محاسبه حد چپ در $x = 2$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-10x + k[-x]}{(x-2)(x-3)} = \frac{-20 + k(-2)}{0^+} = \frac{-20 - 2k}{0^+} = -\infty \Rightarrow -20 - 2k < 0 \Rightarrow 2k > -20 \Rightarrow k > -10 \quad (II)$$

از (I) و (II) نتیجه می‌گیریم:

$$-10 < k < -\frac{20}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-9, -8, -7\}$$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح k برابر است با:

$$(-9) + (-8) + (-7) = -24$$



رفع ابهام!

چطوری $\lim_{x \rightarrow 2^-} [-x] = -2$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} [-x] = -3$ شد؟

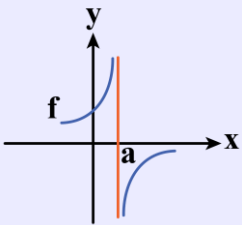
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [-x] = [-(2^+)] = [(-2)^-] = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [-x] = [-(2^-)] = [(-2)^+] = -2$$

حد بی‌نهایت

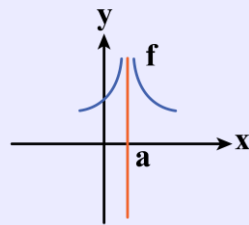
در مسائل حد، اگر x به سمت عددی میل کند که در توابع کسری، مخرج کسر صفر شود (صفر حدی) ولی صورت کسر صفر نشود، در این صورت حاصل حد بی‌نهایت خواهد شد. به این دسته از مسائل (حد بی‌نهایت) می‌گوییم.

$$\frac{\text{عدد}}{\text{حدی } 0} = \infty$$



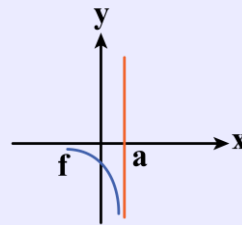
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



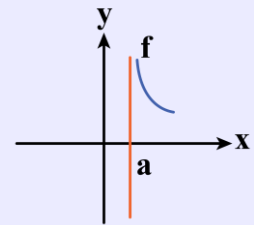
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

حالت‌های ممکن حد بی‌نهایت

در مسائل حد بی‌نهایت که جواب حد، عدد مشخصی نمی‌باشد، تابع حد ندارد.

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

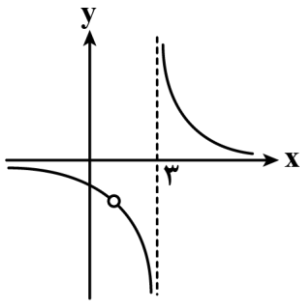
یه نمونه باحال ببین!

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x}{x-1} = \frac{5}{1^- - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^+|} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^-|} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 - \cos x}{\sin x} = \frac{-2 - \cos 0}{\sin 0^+} = \frac{-2 - 1}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+6}{x^2+bx+1-b}$ به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x)$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۳
(۳) -۲
(۴) -۱

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۲ صفحه ۵۶ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$3^2 + 3b + 1 - b = 0 \Rightarrow b = -5$$

$$2a + 6 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$x = 3$ مجانب قائم است. پس:

$x = 2$ عامل مشترک صورت و مخرج است. پس:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-3(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \times \frac{-3(x-2)}{(x-2)(x-3)} = -3$$

روش اول

با توجه به نمودار $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = \pm\infty$ می باشد (یا می توان گفت $x = 3$ مجانب قائم است). بنابراین $x = 3$ ریشه مخرج است. داریم:

$$f(x) = \frac{ax+6}{x^2+bx+1-b} \Rightarrow \text{مخرج را صفر می کند } x=3 \Rightarrow 3^2 + 3b + 1 - b = 0 \Rightarrow b = -5$$

پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \frac{ax+6}{x^2-5x+6}$ می باشد. با توجه به دامنه تابع f می توان گفت $D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$ ، بنابراین تابع f در

$x = 2$ تعریف نمی شود (در نمودار حفره می بینیم) اما در $x = 2$ تابع دارای حد است، پس $x = 2$ علاوه بر آن که مخرج را صفر می کند، صورت را نیز صفر می کند.

$$f(x) = \frac{ax+6}{(x-2)(x-3)} \xrightarrow{x=2 \Rightarrow ax+6=0} 2a+6=0 \Rightarrow a=-3$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{-3x+6}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow f(x) = \frac{-3(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

حال به محاسبه $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x)$ می پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \times \frac{-3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = -3$$

روش دوم

طبق درسنامه انتهای سؤال هر جا حفره داشته باشیم باید عامل مشترکی در صورت و مخرج داشته باشیم، همچنین در $x = 3$ که نمودار تابع به خط قائم نزدیک می شود پس در مخرج باید عامل $x - 3$ نیز داشته باشیم:

$$f(x) = \frac{ax+6}{x^2+bx+1-b} \xrightarrow{x=3 \text{ مخرج را صفر می کند}} 3^2 + 3b + 1 - b = 0 \Rightarrow b = -5$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{ax+6}{x^2-5x+6} = \frac{ax+6}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow x=2 \text{ هم ریشهٔ مخرج و هم ریشهٔ صورت است (حفره در نمودار)}$$

$$\Rightarrow 2a+6=0 \Rightarrow a=-3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-3(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \times \frac{-3(x-2)}{(x-2)(x-3)} = -3$$



در نمودار، اگر حفره ببینیم، در صورت و مخرج عامل مشترکی وجود دارد که عامل صفرشوندهٔ صورت و مخرج است.



در رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)}$ یک تابع خطی می‌بینیم که در $x=4$ حفره دارد؛ زیرا $x=4$ ریشهٔ صورت و مخرج $f(x)$ است.



۴- از یک مجموعهٔ n عضوی به شکل $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ نمونه‌ای پنج عضوی شامل اعداد $7, 8, 11, 19, 20$ به تصادف انتخاب شده است. با توجه به آن نمونه، مقدار n کدام عدد برآورد می‌شود؟

۲۶ (۴)

۲۳ (۳)

۲۴ (۲)

۲۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$\text{برآورد نمونه} = \frac{7+8+11+19+20}{5} = 13$$

باید برآورد نمونه با میانگین جامعه برابر باشد:

$$\frac{n(n+1)}{2n} = 13 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 13 \Rightarrow n = 25$$

برآورد نمونه برابر $\frac{7+8+11+19+20}{5}$ یعنی ۱۳ است، بنابراین باید میانگین اعضای جامعه ۱۳ باشد، میانگین اعضای جامعه $\frac{n+1}{2}$ است،

پس:

$$\frac{n+1}{2} = 13 \Rightarrow n = 25$$



۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x)}{x} = 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf\left(\frac{1}{3x-1}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۲ صفحه ۶۶ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۴

با فرض این که $2x = t$ می باشد (روش تغییر متغیر) داریم:

$$2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$$

$\begin{matrix} t \rightarrow 0^+ \\ \uparrow \\ x \rightarrow 0^+ \end{matrix}$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{\frac{t}{2}} = 1 \Rightarrow 2 \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2}$$

حال برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf\left(\frac{1}{3x-1}\right)$ از تغییر متغیر جدیدی استفاده می کنیم، ببینید:

$$\frac{1}{3x-1} = a \Rightarrow x = \frac{a+1}{3a}$$

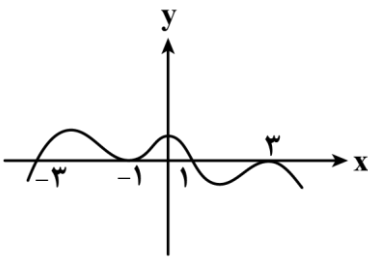
$\begin{matrix} x \rightarrow +\infty \\ \downarrow \\ a \rightarrow 0^+ \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf\left(\frac{1}{3x-1}\right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a+1}{3a} f(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a+1}{3} \times \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{f(a)}{a} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

بنابراین:



۶- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+1)}{f(x)} = +\infty$ باشد، برای a چند جواب قابل قبول وجود دارد؟



$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

(متوسط - مفهومی - سریع) حسابان ۲ صفحه ۵۲ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

چون حاصل حد $+\infty$ شده، پس به ازای a مخرج صفر شده و صورت و مخرج هم علامت می شوند. از طرفی حد راست و حد چپ برابرند پس نمودار نباید دو طرف a تغییر علامت دهد و نقاط ۱ و -3 به این علت حذف می شوند. پس تنها نقاطی که می توانند بررسی شوند -1 و 3 هستند که در تمام شرایط لازم صدق می کنند. پس a دو جواب قابل قبول دارد.

زمانی حاصل حد $+\infty$ می شود که مخرج صفر شود (صفر حدی) بنابراین a باید یکی از صفرهای تابع باشد، پس a یکی از اعداد 3 ، 1 ، -1 و -3 است. هر 4 مقدار ممکن برای a را بررسی می کنیم. ببینید:

$$a = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(-2)}{f(-3)} = \frac{+}{+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(-2)}{f(-3)} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$\begin{matrix} \text{عدد} \\ \uparrow \\ -2 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{عدد} \\ \uparrow \\ -2 \end{matrix}$

در $x = -3$ حدهای راست و چپ هم علامت نیستند.

$$a = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(0)}{f(0)^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(0)}{f(0)^+} = +\infty$$

در $x = -1$ حدهای راست و چپ هم‌علامت هستند. (هر دو $+\infty$ هستند).

$$a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(2)}{f(0)^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(2)}{f(0)^+} = -\infty$$

در $x = 1$ حدهای راست و چپ هم‌علامت نیستند.

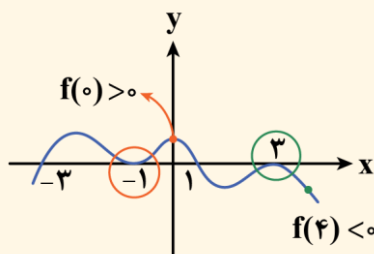
$$a = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(4)}{f(0)^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(4)}{f(0)^-} = +\infty$$

در $x = 3$ حدهای راست و چپ هم‌علامت هستند. (هر دو $+\infty$ هستند).

پس اگر $a = -1$ یا $a = 3$ باشد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+1)}{f(x)} = +\infty$ خواهد بود، یعنی برای a ، دو جواب یافت می‌شود.



با توجه به این که حد راست و چپ برابرند، نمودار در دو طرف a نباید تغییر علامت دهد. از طرفی صورت و مخرج باید هم‌علامت باشند. در نتیجه با توجه به نمودار تنها نقاطی که دارای این شرایطاند -1 و 3 هستند، زیرا در همسایگی -1 با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شویم (0^+) و $f(-1+1)$ نیز مثبت است. همچنین برای 3 در همسایگی آن با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شویم (0^-) و $f(3+1)$ نیز منفی است. پس تنها دو مقدار قابل قبول داریم.



۷- اگر $f(x) = \frac{a}{2a-x}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۶۶ - ۱۳۰۳

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$f(x) = \frac{a}{2a-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2a - \frac{a}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -a \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$f(x) = \frac{2}{4+x} \Rightarrow f(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ابتدا معکوس تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

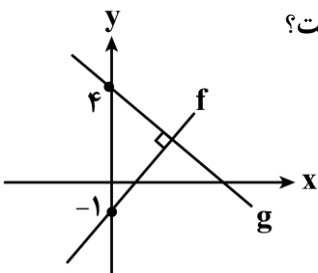
$$f(x) = \frac{a}{2a-x} \Rightarrow y = \frac{a}{2a-x} \Rightarrow 2ay - xy = a \Rightarrow 2ay - a = xy \Rightarrow x = 2a - \frac{a}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2a - \frac{a}{x}$$

حال به بررسی $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times (2a - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2a}{x} - \frac{ax}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ax}{x} = -a \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \frac{-2}{-4-x}$ است و داریم:

$$f(x) = \frac{-2}{-4-x} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{4+x} \Rightarrow f(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



۸- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f-g^{-1})(x)}{(g-f^{-1})(x)} = -8$ باشد، شیب خط f کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۶۶ - ۱۴۰۳

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= mx - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{m}(x+1) \\ g(x) &= -\frac{1}{m}x + 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = -m(x-4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f-g^{-1})(x)}{(g-f^{-1})(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-1) + m(x-4)}{\left(-\frac{1}{m}x + 4\right) - \frac{1}{m}(x+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2mx}{-\frac{2}{m}x} = -8 \Rightarrow -m^2 = -8 \xrightarrow{\text{شیب } f \text{ با توجه به نمودار مثبت است.}} m = 2\sqrt{2}$$

اگر شیب تابع خطی f را m فرض کنیم چون عرض از مبدأ آن -1 است پس ضابطه تابع خطی f به صورت $f(x) = mx - 1$ می‌باشد.

از طرفی نمودار تابع خطی g بر f عمود بوده، پس شیب آن برابر $-\frac{1}{m}$ است. ضابطه g نیز به صورت $g(x) = -\frac{1}{m}x + 4$ بوده و داریم:

$$f(x) = mx - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{m}(x+1)$$

$$g(x) = -\frac{1}{m}x + 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = -m(x-4)$$

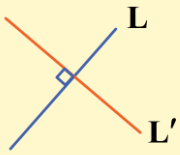
حال $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f-g^{-1})(x)}{(g-f^{-1})(x)}$ را بازنویسی کرده و برابر -8 قرار می‌دهیم. ببینید:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f-g^{-1})(x)}{(g-f^{-1})(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-1) + m(x-4)}{\left(-\frac{1}{m}x + 4\right) - \frac{1}{m}(x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2mx}{-\frac{2}{m}x} = -m^2 = -8 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$$

چون شیب تابع خطی f مثبت است $m = +2\sqrt{2}$ قابل قبول است.

دو خط عمود بر هم

اگر دو خط بر هم عمود باشند شیب‌هایشان قرینه و معکوس یکدیگر هستند، بنابراین حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 می‌باشد. (البته اگر موازی محورهای مختصات نباشند.)



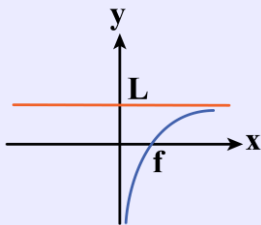
$$L \perp L' \Rightarrow m_L \times m_{L'} = -1$$

تابع خطی

در حالت کلی ضابطه تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ می‌باشد که در آن a شیب و b عرض از مبدأ است.

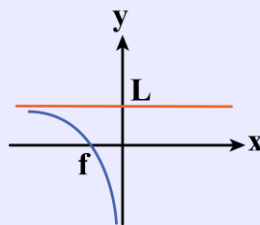
حد در بی‌نهایت

حاصل حد وقتی $x \rightarrow \infty$ را حد در بی‌نهایت می‌گوییم. برای محاسبه حد در بی‌نهایت در توابع کسری کافی است بزرگ‌ترین جمله در صورت و مخرج را فاکتور بگیریم یا فقط در صورت و مخرج جمله با توان بیشتر را قرار دهیم. (قاعده پرتوان)



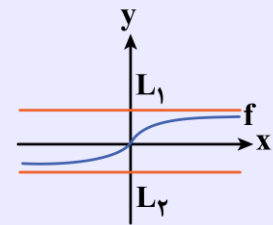
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{تعریف نمی‌شود}$$



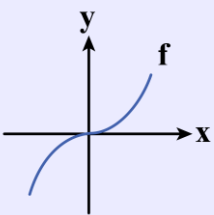
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

قاعده پرتوان

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots) \sim ax^n$$

یه نمونه باحال ببین!

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{-3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{-3x} = -\frac{2}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = 4 \times (-\infty) = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+5}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

 **یه نکته طلایی!**

در محاسبه حد در بی نهایت، اگر درون براکت به بی نهایت میل کند می توانیم براکت را برداریم. یعنی:

$$[u] \sim u \\ u \rightarrow \infty$$

 **یه نمونه باحال ببین!**

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \times \left[\frac{5}{4x^2} \right] = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \times \left[\frac{5}{4x^2} \right] \xrightarrow{x \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \times \frac{5}{4x^2} = \frac{5}{2}$$



۹- اگر $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + x + 1}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(-2x)}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۱)$$

(آسان - خطبه خط - سریع) حسابان ۲ صفحه ۶۲ - ۱۲۰۳

 پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow f(-2x) = -4x - \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{4x^2 - 2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2}}{-4x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \overline{[-x]}}{-4x - \overline{[-2x]}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{-4x + 2x} = -\frac{3}{2}$$

روش اول

$$f(-2x) = -4x - \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$$

ابتدا تابع $y = f(-2x)$ را تشکیل می دهیم. ببینید:

حال به محاسبه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(-2x)}$ می پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{4x^2 - 2x + 1}}$$

توجه کنید در صورت و در زیر رادیکال x^2 را نگه داشته و از سایر جملات در زیر رادیکال صرف نظر می کنیم (قاعده پرتوان) برای رادیکال موجود در مخرج نیز همین روند را تکرار می کنیم. ببینید:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{4x^2 - 2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2}}{-4x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{-4x - |2x|}$$

$$\xrightarrow{\substack{|x|=-x \\ |2x|=-2x}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-x)}{-4x - (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم

طبق درسنامه و با کمک هم‌ارزی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{4x^2 - 2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{1 \left| x + \frac{1}{2 \times 1} \right|}}{-4x - \sqrt{4 \left| x + \frac{-2}{2 \times 4} \right|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{1 \left| x + \frac{1}{2} \right|}}{-4x - 2 \sqrt{1 \left| x - \frac{1}{4} \right|}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-x)}{-4x - 2(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2}$$

هم‌ارزی مهم در توابع رادیکالی

اگر $x \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه در توابع رادیکالی به شرط برابری بیشترین توان x در زیر رادیکال با فرجه رادیکال می‌توان گفت:

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| & \text{زوج } n \rightarrow \sqrt[n]{a} \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right) & \text{فرد } n \rightarrow \sqrt[n]{a} \text{ فرد} \end{cases}$$

یه نمونه باحال ببین!

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 16x + 1}$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 16x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4 \left| x + \frac{-16}{2 \times 4} \right|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 \underbrace{\left| x - 2 \right|}_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2(x - 2) = 4$$



۱۰- تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+ax+4}$ فقط دو مجانب موازی محورهای مختصات دارد. نمودار تابع f در مجاورت مجانب قائم خود، کدام نمی تواند باشد؟



پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - خط به خط - زمان ۵ - حسابان ۲ صفحه ۵۷ - ۱۲۰۳)

تابع f یک مجانب افقی دارد، ببینید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2+ax+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ مجانب افقی}$$

بنابراین طبق صورت سوال باید یک مجانب قائم هم داشته باشد، دو حالت ایجاد می شود که بررسی می کنیم:

حالت اول

مخرج ریشه مضاعف داشته باشد که ریشه صورت نیست:

$$x^2+ax+4=0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$a = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$a = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{(x+2)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{x-1}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$



حالت دوم

صورت و مخرج ریشه مشترک باشند: اگر مخرج دارای ۲ ریشه متمایز باشد به طوری که یکی از ریشه ها با ریشه صورت برابر باشد، صورت و مخرج با هم ساده شده و مخرج یک ریشه و در نتیجه تابع یک مجانب قائم خواهد داشت.

$$x^2+ax+4=0 \xrightarrow{x=1} 1+a+4=0 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+4} = \frac{x-1}{(x-1)(x-4)}$$

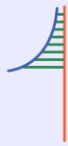
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-4} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{4^+-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{4^--4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع در اطراف مجانب قائم خود، نمی تواند شکلی شبیه گزینه ۴ داشته باشد.

 مجانب

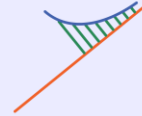
خطی است که نمودار تابع به آن نزدیک و نزدیکتر شده و با آن تا بی‌نهایت می‌رود (ولی در بی‌نهایت برخورد ندارد).



$x = a$ مجانب قائم



$y = b$ مجانب افقی



$y = ax + b$ مجانب مایل (در کتاب نیست)

مجانب قائم: خط قائمی است که نمودار تابع به آن نزدیک و نزدیکتر می‌شود. اگر خط $x = a$ مجانب قائم تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. برای به‌دست آوردن مجانب قائم در توابع کسری، ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم به شرطی که ریشه صورت نباشد و حداقل در یک همسایگی آن تابع تعریف شود.

 توابعی که مجانب قائم ندارند!

توابعی که برد محدود دارند، مجانب قائم ندارند زیرا y نمی‌تواند به ∞ برسد. مانند: $y = \sin x$ و ...

 به نمونه باحال بین!

۱) $f(x) = \frac{2x-2}{|x|-1}$

زیرا صورت کسر صفر می‌شود. $x = 1$ ✗
 $|x|-1=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ✗} \\ x=-1 \text{ ✓ مجانب قائم} \end{cases}$

۲) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

زیرا در همسایگی آن تابع تعریف نمی‌شود. $x = 0$ ✗
 $D_g = \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \cap \rightarrow D_g = (1, +\infty)$ $\begin{cases} x = 0 \text{ ✗} \\ x = 1 \text{ ✓ مجانب قائم} \end{cases}$

مجانب افقی: خطی افقی است که نمودار تابع به آن نزدیک و نزدیکتر می‌شود. هر چه مقدار x به ∞ نزدیکتر شود، نمودار تابع به خط مجانب افقی خود نزدیکتر می‌شود. اگر خط $y = b$ مجانب افقی تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. برای به‌دست آوردن مجانب افقی توابع، حد آن را در بی‌نهایت به‌دست می‌آوریم که باید حاصل آن **عدد مشخصی** باشد.

 توابعی که مجانب افقی ندارند!

توابعی که دامنه محدود دارند، مجانب افقی ندارند؛ زیرا x نمی‌تواند به ∞ برسد. مانند $y = \sqrt{1-x^2}$ و ...

 به نمونه باحال بین!

۱) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4}$

مجانب افقی $y = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$

۲) $g(x) = \frac{2x^2-5x+1}{-3x^2+4}$

مجانب افقی $y = -\frac{2}{3}$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5x+1}{-3x^2+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$

۱۱- تابع $f(x) = \frac{ax-1}{x+d}$ مفروض است. اگر نقطه برخورد مجانب‌های توابع $y = f^{-1}(x)$ و $y = \frac{4}{f(x)}$ بر هم منطبق باشند، مقدار $f(0)$

کدام است؟

$\pm 2 \quad (4)$

$\pm 1 \quad (3)$

$\pm \frac{1}{2} \quad (2)$

$\pm \frac{1}{4} \quad (1)$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۶۹ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$f(x) = \frac{ax-1}{x+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx-1}{x-a} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = -d \Rightarrow y = -d \text{ مجانب افقی} \\ x-a=0 \Rightarrow x=a \text{ مجانب قائم} \end{cases} \Rightarrow (a, -d)$$

$$f(x) = \frac{ax-1}{x+d} \Rightarrow \frac{4}{f(x)} = \frac{4(ax-1)}{ax-1} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{f(x)} = \frac{4}{a} \Rightarrow y = \frac{4}{a} \text{ مجانب افقی} \\ ax-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \text{ مجانب قائم} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{4}{a}\right)$$

$$\Rightarrow (a, -d) = \left(\frac{1}{a}, \frac{4}{a}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \pm 1 \\ -d = \frac{4}{a} \Rightarrow d = \mp 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow d=-4 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x-4} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{4} \\ a=-1 \Rightarrow d=4 \Rightarrow f(x) = \frac{-x-1}{x+4} \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

ابتدا به کمک تابع $f(x)$ ، توابع $f^{-1}(x)$ و $\frac{4}{f(x)}$ را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$f(x) = \frac{ax-1}{x+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx-1}{x-a} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-dx-1}{x-a} = -d \Rightarrow y = -d \text{ مجانب افقی} \\ x-a=0 \Rightarrow x=a \text{ مجانب قائم} \end{cases}$$

محل برخورد مجانب‌ها $(a, -d)$

$$f(x) = \frac{ax-1}{x+d} \Rightarrow \frac{4}{f(x)} = \frac{4(ax-1)}{ax-1} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(ax-1)}{ax-1} = \frac{4}{a} \Rightarrow y = \frac{4}{a} \text{ مجانب افقی} \\ ax-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \text{ مجانب قائم} \end{cases}$$

محل برخورد مجانب‌ها $\left(\frac{1}{a}, \frac{4}{a}\right)$

از آن‌جا که محل برخورد مجانب‌ها در دو تابع $y = f^{-1}(x)$ و $y = \frac{4}{f(x)}$ یکی است، داریم:

$$(a, -d) = \left(\frac{1}{a}, \frac{4}{a}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ -d = \frac{4}{a} \Rightarrow d = -\frac{4}{a} \Rightarrow d = \mp 4 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع هموگرافیک $f(x)$ به یکی از دو صورت زیر است:

$$a = +1, d = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x-4} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{4}$$

$$a = -1, d = +4 \Rightarrow f(x) = \frac{-x-1}{x+4} \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{4}$$

محاسبه معکوس تابع هموگرافیک

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ را یک تابع هموگرافیک می‌گوییم که معکوس آن برابر است با:

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$



۱۲- حداکثر فاصله بین دو مجانب قائم تابع $y = \tan \frac{\pi}{3x}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۵۵ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$\frac{\pi}{3x} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{3x} = k + \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{2}{6k+3}$$

$$\text{Max}(x) = \frac{2}{3} \quad \text{Min}(x) = -\frac{2}{3} \quad \text{Max}(x) - \text{Min}(x) = \frac{4}{3}$$

مجانب‌های قائم $y = \tan(A(x))$ برابر است با:

$$A(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

بنابراین مجانب‌های قائم تابع $y = \tan \frac{\pi}{3x}$ عبارت‌اند از:

$$\frac{\pi}{3x} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{3x} = k + \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{2}{6k+3}$$

تعدادی از مجانب‌ها را در جدول زیر به دست آورده‌ایم. ببینید:

k	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
x	...	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{21}$	...

$\frac{4}{3}$

بیشترین فاصله بین دو مجانب قائم، همان فاصله بین $x = \frac{2}{3}$ و $x = -\frac{2}{3}$ است، که برابر $\frac{4}{3}$ می‌باشد.

$$f(x) = \tan(A(x)) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin(A(x))}{\cos(A(x))} \Rightarrow \cos A(x) = 0 \Rightarrow A(x) = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(x) = \cot(A(x)) \Rightarrow f(x) = \frac{\cos(A(x))}{\sin(A(x))} \Rightarrow \sin(A(x)) = 0 \Rightarrow A(x) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

به نمونهٔ باحال بین!

مجانب‌های قائم توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x) = \tan 3x$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۲) $f(x) = \cot(2x + \frac{\pi}{3})$

$$2x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



۱۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 1}{x^2 + x + 1}$ مجانب افقی خود را در نقطهٔ $A(-2, 3)$ قطع می‌کند. نمودار تابع f در مجاورت مجانب افقی خود چگونه است؟



(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - حسابان ۲ صفحه ۶۸ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

 با توجه به این که عرض نقطهٔ برخورد تابع f با مجانب افقی اش برابر ۳ می‌باشد، لذا $y = 3$ مجانب افقی تابع است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx - 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = a \Rightarrow y = a \Rightarrow \text{مجانب افقی} \Rightarrow a = 3$$

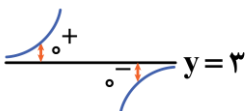
 از طرفی تابع f از نقطهٔ $A(-2, 3)$ عبور می‌کند، بنابراین $f(-2) = 3$ می‌باشد و داریم:

$$f(x) = \frac{3x^2 + bx - 1}{x^2 + x + 1} \Rightarrow f(-2) = \frac{3 \times (-2)^2 - 2b - 1}{(-2)^2 + (-2) + 1} = 3 \Rightarrow \frac{11 - 2b}{3} = 3 \Rightarrow 11 - 2b = 9 \Rightarrow b = 1$$

برای تشخیص وضعیت تابع در اطراف مجانب افقی خود به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 4}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{+\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - 4}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{-\infty} = 0^+$$

 بنابراین نمودار تابع در اطراف مجانب افقی خود یعنی $y = 3$ به صورت مقابل است:


که مشابه نمودار موجود در گزینه ۱ است.

 بررسی نمودار تابع در اطراف مجانب افقی

اگر $y = a$ مجانب افقی تابع در شاخه $+\infty$ و $-\infty$ باشد برای تعیین وضعیت نمودار تابع در اطراف مجانب افقی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a)$ برابر 0^+ باشد یعنی تابع در $+\infty$ بالای مجانب افقی خود قرار می‌گیرد و اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a)$ برابر 0^- باشد یعنی تابع در $+\infty$ پایین مجانب افقی خود قرار می‌گیرد. برای $-\infty$ نیز چنین روندی برقرار است.

 به نمونه باحال بین!

وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 5}$ در اطراف مجانب افقی خود چگونه است؟

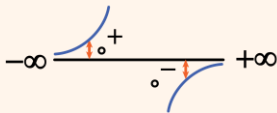
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ (مجانب افقی)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 2x + 5} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \frac{-2}{+\infty} = 0^-$$

تابع در $+\infty$ زیر مجانب افقی است.

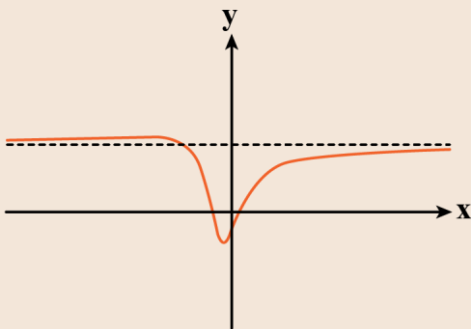
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 2x + 5} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - 5}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \frac{-2}{-\infty} = 0^+$$

تابع در $-\infty$ بالای مجانب افقی است.



 راز طراح!

آیا یک تابع می‌تونه مجانبشو قطع کنه؟ بله! قبل از این‌که بهش مجانب بشه می‌تونه قطعش کرده باشه! مثلاً تابعی که در سؤال اومده به صورت زیر هست:



۱۴- تابع $f(x) = 1 - 2\sin 2x$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{m + f(nx)} = -\infty$ باشد، حداقل مقدار $m + n$ کدام است؟ ($n > 0$)

$$\frac{7}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (۳)$$

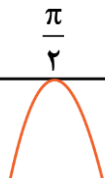
$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۱)$$

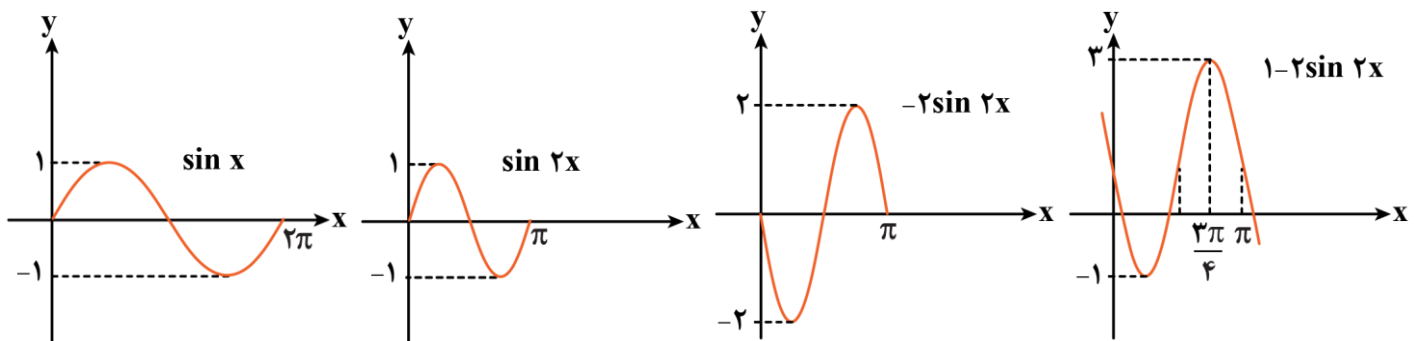
(سخت - مفهومی - زمان بر) - حسابان ۲ صفحه ۵۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که هر دو حد راست و چپ در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر $-\infty$ هستند، پس مخرج $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{m + f(nx)}$ دارای ریشه مضاعف است.

در واقع نمودار مخرج در مجاورت $x = \frac{\pi}{2}$ به صورت  است.

نمودار f به صورت زیر رسم می شود:

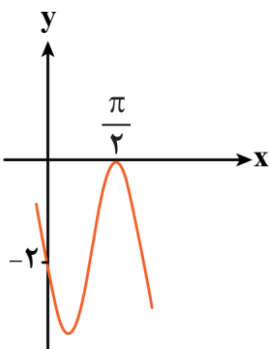


باید برای این که در $x = \frac{\pi}{2}$ حالت لازم را در تابع $m + f(nx)$ ایجاد کنیم تا ریشه مضاعف داشته باشد دو تغییر روی f اعمال کنیم:

(۱) نمودار f را به اندازه ۳ واحد به پایین انتقال دهیم. $m = -3 \leftarrow$

(۲) طول نقاط را $\frac{2}{3}$ برابر کنیم. $n = \frac{3}{2} \leftarrow$

پس از این تبدیلات تابع f در همسایگی $x = \frac{\pi}{2}$ به صورت مقابل درمی آید.



$$m + n = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

در نتیجه:



۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \tan \frac{\pi x}{4x+1})$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۲ صفحه ۶۶ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

به کمک رابطه $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ حد داده شده را بازنویسی می‌کنیم، ببینید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \tan \frac{\pi x}{4x+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi x}{4x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi x}{4x+1})}{\cos \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi x}{4x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{\sin(\frac{\pi}{16x+4})}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin \frac{\pi}{16x+4}}{\frac{1}{2}} \xrightarrow[\sin \frac{\pi}{16x+4} \sim \frac{\pi}{16x+4}]{\sin A \sim A \text{ as } A \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \times \frac{\pi}{16x+4}}{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\pi x}{16x+4} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

روش دوم

اگر روش هوییتال و فرمول‌های مشتق‌گیری را بلدید از این روش استفاده کنید!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \tan \frac{\pi x}{4x+1}) = \infty \times 0 = \text{مبهم}$$

به حالت مبهم $\infty \times 0$ رسیدیم که می‌توانیم آن را به $\frac{0}{0}$ تبدیل کنیم و از روش هوییتال حاصل حد را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \tan \frac{\pi x}{4x+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \tan(\frac{\pi x}{4x+1})}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi(4x+1) - 4 \times \pi x}{(4x+1)^2} \times (1 + \tan^2 \frac{\pi x}{4x+1})}{-\frac{1}{x^2}} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{(4x+1)^2} \times (1 + \tan^2 \frac{\pi x}{4x+1})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{(4x+1)^2} \times (1 + \underbrace{\tan^2 \frac{\pi x}{4x+1}}_{x \rightarrow \infty \Rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{4}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{16x^2} \times (1+1) = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

همارزی

هنگامی که کمان جلوی نسبت‌های مثلثاتی به سمت صفر میل کند، می‌توانیم از جمله هم‌ارز استفاده کنیم:

$$\sin A \sim A \quad \cos A \sim 1 - \frac{A^2}{2} \quad \text{as } A \rightarrow 0$$

$$\tan A \sim A \quad \cot A \sim \frac{1}{A} \quad \text{as } A \rightarrow 0$$

به نمونه باحال ببین!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2})}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{8x^2} = \frac{1}{8}$$

نوشتابه اضافی! (قضیه هوییتال (HOP))

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر باشند، برای محاسبه این حد مبهم، می‌توانیم از قضیه هوییتال استفاده کنیم و اگر مجدداً حد مبهم $(\frac{0}{0})$ شود باز هم قضیه هوییتال را تکرار می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به نمونه باحال ببین!

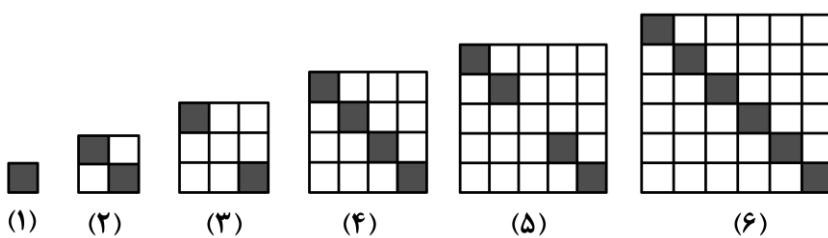
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 7}{2x} = \frac{3}{10}$$

قلیشو یاد بگیر!

$\infty \times \infty$: یکی از حالت‌های مبهم در حد، حالت $\infty \times \infty$ است که برای حل این دسته از حدود، کافی است جمله‌ای که ∞ می‌شود را معکوس نموده و در مخرج قرار دهیم تا حد از حالت مبهم $\infty \times \infty$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود و بتوان از روش هوییتال برای حل آن استفاده کرد.



۱۶- در الگوی شکل مقابل، نسبت تعداد مربع‌های واحد رنگ شده در شکل n ام به تعداد مربع‌های واحد رنگ شده در شکل $(n-1)$ ام برابر $1/1$ است. تعداد مربع‌های سفید در شکل n ام کدام است؟



- (۱) ۳۸۴
(۲) ۱۱۰
(۳) ۴۶۲
(۴) ۱۶۰

آسان - خطبه‌خط - سریع (۱) - ریاضی ۱ صفحه ۱۸ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۳

توجه کنید اگر n فرد باشد (به جز $n=1$ زیرا $n-1$ نداریم)، تعداد مربع‌های رنگی در شکل n ام با تعداد مربع‌های رنگی در شکل $(n-1)$ ام برابر است؛ پس نسبت تعداد آن‌ها برابر ۱ خواهد بود، بنابراین n زوج است. می‌توان گفت در شکل n ام (n) زوج مربع رنگی وجود دارد و در شکل $(n-1)$ ام، $(n-2)$ مربع رنگی وجود دارد، بنابراین برای n زوج:

$$\frac{\text{تعداد مربع‌های رنگی در شکل } n}{\text{تعداد مربع‌های رنگی در شکل } (n-1)} = 1/1 \Rightarrow \frac{n}{n-2} = 1/1 \Rightarrow \frac{n}{n-2} = \frac{11}{10} \Rightarrow 11n - 22 = 10n \Rightarrow n = 22$$

از طرفی در شکل n ام، n^2 مربع واحد وجود دارد که با توجه به زوج بودن n ، تا از آن‌ها رنگی بوده و $(n^2 - n)$ تا از آن‌ها سفید است، پس تعداد مربع‌های واحد سفید در شکل بیست و دوم برابر است با:

$$22^2 - 22 = 484 - 22 = 462$$

۱۷- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، مجموع جملات دوم و چهارم برابر ۴۰ است. اگر جمله چهارم، ۶ واحد از جمله ششم بیشتر باشد، قدرنسبت دنباله کدام می تواند باشد؟

$\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۲۶ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۴

جمله عمومی در یک دنباله هندسی $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ است. به کمک جمله عمومی داریم:

$$a_2 + a_4 = 40 \Rightarrow a_1 \times q + a_1 \times q^3 = 40 \Rightarrow a_1 q(1 + q^2) = 40$$

$$a_4 = 6 + a_6 \Rightarrow a_1 \times q^3 = 6 + a_1 \times q^5 \Rightarrow a_1 q^3(1 - q^2) = 6$$

مقدار a_1 را نداریم. پس برای از بین بردن آن روابط را بر هم تقسیم می کنیم. بنابراین:

$$\frac{a_1 q(1 + q^2)}{a_1 q^3(1 - q^2)} = \frac{40}{6} \Rightarrow \frac{1 + q^2}{q^2 - q^4} = \frac{20}{3} \xrightarrow{q^2 = A} \frac{1 + A}{A - A^2} = \frac{20}{3} \Rightarrow 20A - 20A^2 = 3 + 3A$$

$$\Rightarrow 20A^2 - 17A + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-17)^2 - 4 \times 20 \times 3 = 49 \Rightarrow A = \frac{17 \pm 7}{40} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \\ A = \frac{3}{5} \Rightarrow q^2 = \frac{3}{5} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

فقط $q = \frac{1}{2}$ در گزینه ها موجود است.

دنباله هندسی

به دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب عددی ثابت و غیرصفر در جمله قبلی اش به دست می آید، **دنباله هندسی** می گوئیم. به این مقدار ثابت، قدرنسبت (نسبت مشترک) دنباله می گوئیم و آن را با r (یا q) نمایش می دهیم. **جمله اول دنباله هندسی هیچ گاه صفر نیست.**

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots$$

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت زیر تعریف می شود:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

قدرنسبت (نسبت مشترک) $\uparrow$ r
 جمله عمومی $\uparrow$ a_n
 جمله اول $\downarrow$ a_1
 شماره جمله $\rightarrow$ $n-1$



۱۸- در یک دنباله حسابی با جملات متمایز و نامنفی، حاصل ضرب جملات سوم و نهم برابر ۴ و حاصل ضرب جملات پنجم و هفتم برابر ۶ است. جمله دهم چند برابر جمله هشتم است؟

$$\frac{9}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{8}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{4} \quad (۱)$$

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - ریاضی ۱ صفحه ۲۲ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

جمله عمومی در دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ می‌باشد، بنابراین:

$$a_3 \times a_9 = 4 \Rightarrow (a_1 + 2d) \times (a_1 + 8d) = 4 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 16d^2 = 4 \quad (I) \quad \xrightarrow{(II)-(I)} 8d^2 = 2 \Rightarrow d^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_5 \times a_7 = 6 \Rightarrow (a_1 + 4d) \times (a_1 + 6d) = 6 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 24d^2 = 6 \quad (II)$$

جملات دنباله نامنفی هستند.

$$\xrightarrow{d > 0} d = \frac{1}{2}$$

با جای گذاری $d = \frac{1}{2}$ در یکی از معادلات (I) یا (II) می‌توان a_1 را محاسبه کرد:

$$a_1^2 + 10a_1d + 24d^2 = 6 \xrightarrow{d=\frac{1}{2}} a_1^2 + 5a_1 = 0 \Rightarrow a_1(a_1 + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \checkmark \\ a_1 = -5 \times \end{cases}$$

بنابراین نسبت جمله دهم به جمله هشتم برابر است با:

$$\frac{a_{10}}{a_8} = \frac{a_1 + 9d}{a_1 + 7d} = \frac{0 + \frac{9}{2}}{0 + \frac{7}{2}} = \frac{9}{7}$$

روش دوم

با توجه به این که $a_n = a_m + (n-m)d$ می‌باشد، بنابراین:

$$a_9 = a_6 + 3d \Rightarrow a_9 \times a_3 = (a_6 + 3d)(a_6 - 3d) = 4 \Rightarrow a_6^2 - 9d^2 = 4$$

$$a_3 = a_6 - 3d$$

$$a_7 = a_6 + d \Rightarrow a_7 \times a_5 = (a_6 + d)(a_6 - d) = 6 \Rightarrow a_6^2 - d^2 = 6$$

$$a_5 = a_6 - d$$

$$\begin{cases} a_6^2 - d^2 = 6 \\ a_6^2 - 9d^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_6^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a_6 = \frac{5}{2} \\ d^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow \frac{5}{2} = a_1 + \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

بنابراین نسبت جمله دهم به جمله هشتم برابر است با:

$$\frac{a_{10}}{a_8} = \frac{\frac{1}{2} \times 10 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times 8 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{9}{7}$$

دنباله حسابی

دنباله حسابی دنباله‌ای است که در آن، هر جمله (به جز جمله اول) از اضافه شدن یک **عدد ثابت** به نام **قدرنسبت** یا **اختلاف مشترک** (d) به جمله قبل از خود به دست می‌آید. جمله عمومی دنباله به صورت زیر می‌باشد:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

شماره جمله
جمله عمومی

جمله اول
قدرنسبت (اختلاف مشترک)

اگر هر جمله را از جمله قبلی کم کنیم قدرنسبت به دست می‌آید:

$$d = a_{m+1} - a_m$$

۱۹- دنباله $a_n = 4n - 2$ مفروض است. جمله ششم الگوی درجه دوم $a_1, a_3, a_4, \dots$ با جمله چندم دنباله a_n برابر است؟
 اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

(متوسط - ترکیبی - زمان ۲۰ - ریاضی ۱ صفحه ۲۰ - ۱۰۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

جملات اول، سوم و چهارم دنباله $a_n = 4n - 2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_1 = 2$$

$$a_3 = 10$$

$$a_4 = 14$$

بنابراین دنباله درجه دوم به صورت $2, 10, 14, \dots$ می‌باشد. به کمک این سه جمله، جمله عمومی دنباله درجه دوم را محاسبه می‌کنیم. اگر الگوی درجه دوم را به فرم $t_n = an^2 + bn + c$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = a + b + c = 2 \\ t_2 = 4a + 2b + c = 10 \\ t_3 = 9a + 3b + c = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(-)} 3a + b = 8 \\ \xrightarrow{(-)} 5a + b = 4 \end{array} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = 14 \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله اول}} c = -10$$

بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت $t_n = -2n^2 + 14n - 10$ می‌باشد و جمله ششم آن برابر $t_6 = 2$ می‌باشد که با جمله اول دنباله $a_n = 4n - 2$ برابر است. زیرا:

$$a_n = 4n - 2 \Rightarrow 4n - 2 = 2 \Rightarrow n = 1$$

الگو و دنباله درجه دوم

به الگوها و دنباله‌هایی که میزان اختلاف جملات متوالی در آن‌ها ثابت نبوده و اختلاف جملات متوالی، خودشان تشکیل یک دنباله خطی بدهند، الگو یا دنباله درجه دوم می‌گوییم که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$; ($a \neq 0$) است. به عبارت دیگر، اگر دنباله درجه دوم و a_n دنباله اختلاف جملات متوالی آن باشد، در این صورت a_n دنباله‌ای خطی با قدرنسبت d است.

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots \\ & +a_1 & +a_2 & +a_3 & \\ & & +d & +d & \end{array}$$

یه نمونه باحال ببین!

اگر $t_n = 2n^2 - n + 1$ ، جمله عمومی یک دنباله درجه دوم باشد، جملات آن به صورت $2, 7, 16, 29, \dots$ است و داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 7 & 16 & 29 & \dots \\ & +5 & +9 & +13 & \\ & & +4 & +4 & \end{array}$$

همان طور که می بینید اختلاف جملات متوالی این دنباله به صورت $5, 9, 13, \dots$ هستند که خودشان تشکیل یک دنباله خطی با قدرنسبت ۴ می دهند.

نحوه به دست آوردن جمله عمومی یک دنباله درجه دوم

می دانیم که جمله عمومی یک دنباله درجه دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c$; $(a \neq 0)$ است، حال برای به دست آوردن ضرایب مجهول a, b و c به روش زیر عمل می کنیم:

برای به دست آوردن ضریب a ، اختلافی از جملات متوالی (همان قدرنسبت دنباله خطی a_n) را به دست آورده و آن را نصف می کنیم. برای به دست آوردن ضریب c ، از رابطه $c = t_1 - (a_1 - d)$ استفاده می کنیم. در نهایت، برای به دست آوردن ضریب b ، یکی از جملات دنباله (معمولاً جمله اول) را در جمله عمومی t_n جای گذاری می کنیم.

روش دوم به دست آوردن جمله عمومی در دنباله درجه دوم

جمله عمومی در دنباله های درجه دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c$; $(a \neq 0)$ می باشد که برای پیدا کردن a, b و c باید ۳ جمله دنباله را داشته باشیم.



۲۰- در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول برابر ۲۷ و مجموع $2n$ جمله اول برابر ۱۸۰ است. مجموع $3n$ جمله اول این دنباله کدام است؟

۳۷۴ (۴)

۳۹۶ (۳)

۴۸۳ (۲)

۴۵۹ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

جملات را به ۳ دسته n تایی تقسیم می کنیم. بنابراین:

$$\begin{array}{c} \overbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3}, \dots, a_{3n}}^{3n \text{ جمله}} \\ \underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}_{n \text{ جمله}} \quad \underbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots, a_{2n}}_{n \text{ جمله}} \quad \underbrace{a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3}, \dots, a_{3n}}_{n \text{ جمله}} \\ S_1 = \text{جمع جملات} \quad S_2 = \text{جمع جملات} \quad S_3 = \text{جمع جملات} \end{array}$$

$$S_1 = 27$$

طبق فرض سوال داریم:

$$S_1 + S_2 = 180 \Rightarrow S_2 = 153$$

توجه کنید که مجموع جملات دسته ها، خود یک دنباله حسابی با جمله اول S_1 و قدرنسبت $n^2 d$ تشکیل می دهند، بنابراین:

$$S_1, S_2, S_3, \dots \Rightarrow S_1 + S_3 = 2S_2 \Rightarrow 27 + S_3 = 2 \times 153 \Rightarrow S_3 = 306 - 27 \Rightarrow S_3 = 279$$

بنابراین مجموع $3n$ جمله اول برابر $S_1 + S_2 + S_3$ یعنی $27 + 153 + 279$ می باشد که برابر ۴۵۹ است.

دسته بندی جملات دنباله حسابی

اگر جملات یک دنباله حسابی را به صورت مقابل به دسته های n تایی تقسیم کنیم داریم:

$$\begin{array}{c} \underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}_{n \text{ جمله}} \quad \underbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots, a_{2n}}_{n \text{ جمله}} \quad \underbrace{a_{2n+1}, a_{2n+2}, a_{2n+3}, \dots, a_{3n}}_{n \text{ جمله}} \\ S_1 = \text{جمع جملات} \quad S_2 = \text{جمع جملات} \quad S_3 = \text{جمع جملات} \end{array}$$

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}_{\text{جمله } n}, \underbrace{a_1 + nd, a_2 + nd, a_3 + nd, \dots, a_n + nd}_{\text{جمله } n}, \underbrace{a_1 + 2nd, a_2 + 2nd, a_3 + 2nd, \dots, a_n + 2nd, \dots}_{\text{جمله } n}$$

$$\text{جمع جملات} = S_1 \quad \text{جمع جملات} = S_1 + n^2 d \quad \text{جمع جملات} = S_1 + 2n^2 d$$

بنابراین مجموع جملات دسته‌ها، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول S_1 و قدرنسبت $n^2 d$ می‌دهند.

$$S_1, S_1 + n^2 d, S_1 + 2n^2 d, S_1 + 3n^2 d, \dots$$

↓
مجموع n جمله اول دنباله

↓
مجموع n جمله دوم دنباله

↓
مجموع n جمله سوم دنباله

↓
مجموع n جمله چهارم دنباله

یه نمونه باحال ببین!

در یک دنباله حسابی، اگر مجموع ۱۰ جمله اول برابر ۵۴ و مجموع ۲۰ جمله اول دنباله برابر ۲۲۰ باشد، مجموع ۳۰ جمله اول دنباله چقدر است؟

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}}_{S_1=54}, \underbrace{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{20}}_{S_2=220-54=166}, \underbrace{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{30}}_{S_3}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_3 = 2S_2 \Rightarrow 54 + S_3 = 2 \times 166 \Rightarrow S_3 = 278$$

بنابراین مجموع ۳۰ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 54 + 166 + 278 = 498$$



۲۱- دنباله $a, b, c, \dots$ هندسی و دنباله $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, c, \dots$ حسابی است. مجموع چهار جمله اول دنباله هندسی چند برابر مجموع چهار جمله اول دنباله حسابی است؟ ($a \neq 0$)

$$\frac{15}{4} \quad (4)$$

$$\frac{15}{8} \quad (3)$$

$$\frac{7}{4} \quad (2)$$

$$\frac{7}{3} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

دنباله $a, b, c, \dots$ هندسی با قدرنسبت r بوده، بنابراین دنباله $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, c, \dots$ نیز هندسی با قدرنسبت $2r$ است. ببینید:

$$a, b, c \Rightarrow \begin{cases} b = ar \\ c = br \end{cases}$$

$$\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, c \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{4} = \frac{a}{4} \times 2r \\ c = \frac{b}{4} \times 2r \end{cases}$$

بنابراین دنباله $\frac{a}{4}, \frac{b}{2}, c, \dots$ هندسی بوده و طبق گفته سوال این دنباله حسابی نیز می باشد، پس این دنباله باید ثابت باشد تا هم حسابی (با قدرنسبت ۰) و هم هندسی (با قدرنسبت ۱) باشد، داریم:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = c = k \Rightarrow \begin{cases} a = 4k \\ b = 2k \\ c = k \end{cases}$$

دنباله $a, b, c, \dots$ هندسی است، پس:

$$a, b, c, \dots \Rightarrow 4k, 2k, k, \dots \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow S_4 = \frac{4k(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{15}{2}k$$

$$\frac{a}{4}, \frac{b}{2}, c, \dots \Rightarrow k, k, k, \dots \Rightarrow d = 0 \Rightarrow S'_4 = 4k$$

بنابراین نسبت مجموع ۴ جمله اول دنباله هندسی به مجموع ۴ جمله اول دنباله حسابی برابر است با:

$$\frac{S_4}{S'_4} = \frac{\frac{15}{2}}{4} = \frac{15}{8}$$

دنباله ثابت

دنباله ای با جمله عمومی $a_n = k$ می باشد که تمام جملات آن با هم برابر بوده و یک دنباله حسابی با قدرنسبت صفر و یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۱ می باشد.

$$k, k, k, \dots \Rightarrow \begin{cases} d = 0 & \Rightarrow \text{دنباله حسابی} \\ r = 1 & \Rightarrow \text{دنباله هندسی} \end{cases}$$

مجموع جملات دنباله حسابی

اگر a_1 جمله اول و d قدرنسبت دنباله حسابی باشد، مجموع n جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مجموع جملات دنباله هندسی

اگر a_1 جمله اول و r قدرنسبت دنباله هندسی باشد، مجموع n جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$



۲۲- نقطه A روی خط d قرار دارد. تعداد نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله k و از خط d به فاصله h هستند، کدام عدد نمی تواند باشد؟

۴ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

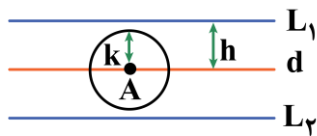
(متوسط - مفهومی - سریع) - هندسه ۳ صفحه ۳۶ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

طبق درسنامه، مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله h باشند، دو خط موازی و به فاصله h در دو طرف خط d است. همچنین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله k باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع k می باشد. برخورد این مکان های هندسی، جواب سوال است.

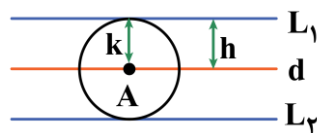
با یکی از ۳ حالت زیر مواجه می شویم، ببینید:

حالت اول



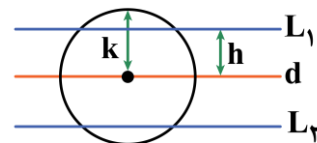
اگر $k < h$ باشد، خطوط L_1 و L_2 دایره را قطع نمی کنند و مسئله جواب ندارد. (صفر جواب)

حالت دوم



اگر $k = h$ باشد، خطوط L_1 و L_2 در ۲ نقطه بر دایره مماس اند و مسئله ۲ جواب دارد.

حالت سوم



اگر $k > h$ باشد، خطوط L_1 و L_2 مجموعاً در چهار نقطه دایره را قطع می کنند و مسئله ۴ جواب دارد.

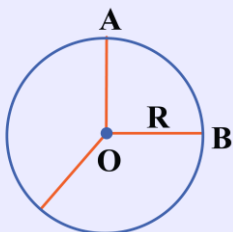
پس در هیچ حالتی مسئله نمی تواند ۱ جواب داشته باشد.

مکان هندسی

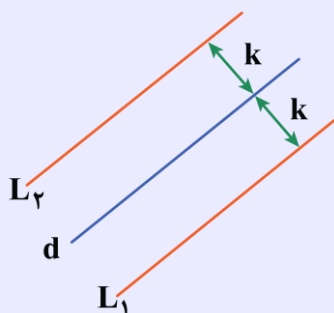
مجموعه نقاطی از فضا یا صفحه که دارای ویژگی یکسانی باشند را «مکان هندسی» می گوئیم.

به معرفی چند مکان هندسی معروف می پردازیم:

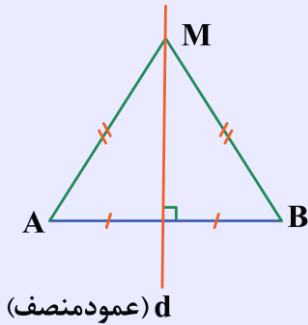
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله معلوم k باشند، خط موازی d و به فاصله k از آن است.

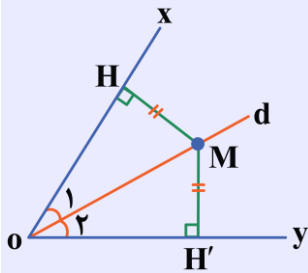


۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از ۲ سر یک پاره خط به یک فاصله باشند، نقاط واقع بر عمودمنصف آن پاره خط است.



$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از ۲ ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نقاط واقع بر نیمساز آن زاویه است.



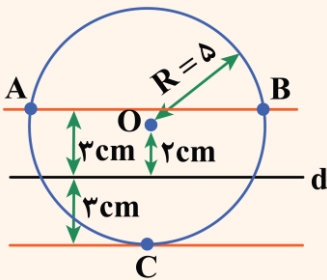
$$M \Leftrightarrow MH = MH' \text{ روی نیمساز زاویه } xOy \text{ واقع است.}$$

اشتراک چند مکان هندسی

اگر در یک سوال چند مکان هندسی مدنظر باشد تمامی آن‌ها را رسم کرده و نقاط برخورد (مشترک) را به عنوان جواب در نظر می‌گیریم.

یه نمونه باحال ببین!

سؤال: نقطه O به فاصله ۲cm از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از O به فاصله ۵ و از خط d به فاصله ۳cm باشد؟ ابتدا دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵cm رسم می‌کنیم، سپس خط ۲ به فاصله ۳cm موازی با d در دو طرف آن رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل می‌بینید، این دو مکان هندسی ۳ نقطه مشترک (C, B, A) دارند، پس مسئله ۳ جواب دارد.



۲۳- دایره‌های C_1 و C_2 بر هر دو محور مختصات مماس‌اند. اگر معادله خط‌المركزین این دو دایره به صورت $7x - 3y = 20$ باشد، شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

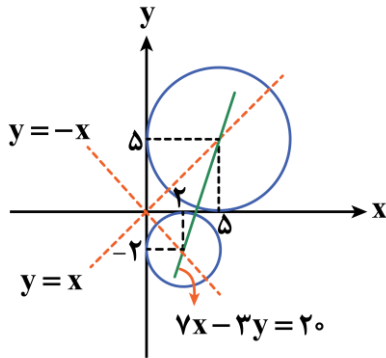
۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - سریع) - هندسه ۳ صفحه ۴۳ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

مرکز دایره‌های مماس بر هر دو محور مختصات، روی نیمسازهای نواحی اول و سوم یعنی $y = x$ و یا روی نیمساز نواحی دوم و چهارم یعنی $y = -x$ واقع هستند. توجه کنید مرکز هر دو دایره روی یکی از دو نیمساز قرار ندارد، زیرا در این صورت همان معادله نیمساز، معادله خط‌المركزین دو دایره است که با فرض سوال همخوانی ندارد، بنابراین مرکز یکی از این دایره‌ها روی خط $y = x$ و مرکز دایره دیگر، روی خط



$y = -x$ قرار دارد، کافی است نقطه برخورد معادله خط‌المركزين يعنى $7x - 3y = 20$ با هر دو خط $y = -x$ و $y = x$ را محاسبه کنیم، ببینید:

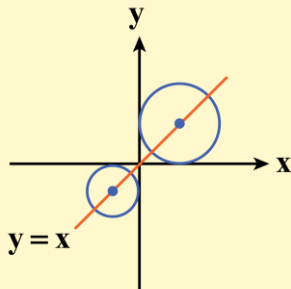
$$\begin{cases} 7x - 3y = 20 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = 5 \Rightarrow O(5, 5) \Rightarrow R = 5$$

$$\begin{cases} 7x - 3y = 20 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow O'(2, -2) \Rightarrow R' = 2$$

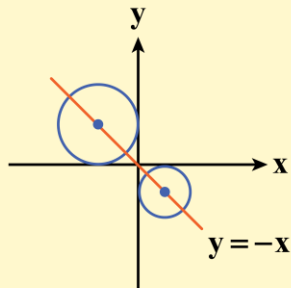
بنابراین شعاع دایره کوچک‌تر برابر ۲ است.

دایره‌های مماس بر محورهای مختصات

مرکز دایره‌ای که در ناحیه اول یا سوم بر محورهای مختصات مماس باشد روی خط $y = x$ واقع است، بنابراین مختصات مرکز این دایره $O(\alpha, \alpha)$ بوده و شعاع آن $R = |\alpha|$ است.



مرکز دایره‌ای که در ناحیه دوم یا چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد روی خط $y = -x$ واقع است، بنابراین مختصات مرکز این دایره $O(\alpha, -\alpha)$ بوده و شعاع آن $R = |\alpha|$ است.



۲۴- کمترین مقدار x در معادله $36x^2 + 36y^2 - 24x + 48y + 19 = 0$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۴۱ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

معادله داده شده، معادله دایره است. ابتدا دو طرف معادله را بر ۳۶ تقسیم کرده و مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

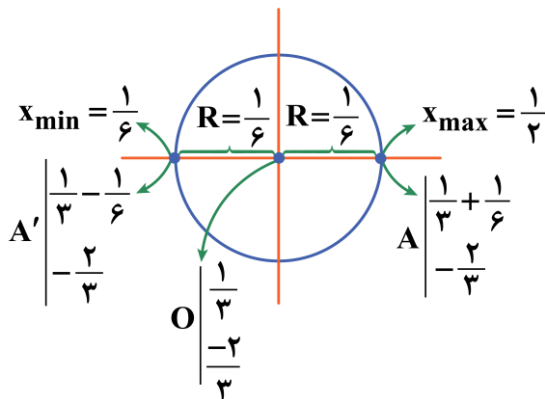
$$36x^2 + 36y^2 - 24x + 48y + 19 = 0 \xrightarrow{\div 36} x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{19}{36} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = \frac{19}{36} \end{cases}$$

مختصات مرکز دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع دایره $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ می‌باشد، بنابراین:

$$O(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2 - 4(\frac{19}{36})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{19}{9}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{6}$$

حال دایره را رسم می‌کنیم، ببینید:



$$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \min(x) = \frac{1}{6}$$

مرکز و شعاع دایره

صورت کلی معادله گسترده یک دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. اگر روش مربع کامل را به کار ببریم، داریم:

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + ax}_{(\frac{a}{2})^2} + \underbrace{y^2 + by}_{(\frac{b}{2})^2} + c = 0 \Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره : } O \begin{cases} x + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2} \\ y + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \\ \text{شعاع دایره : } R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$$

یه نمونه باحال ببین!

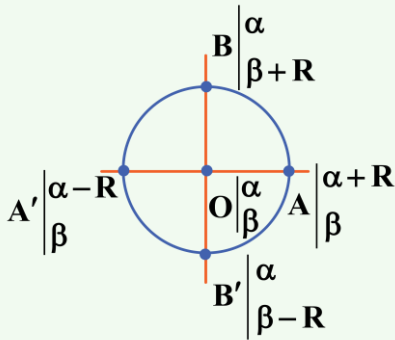
مختصات مرکز و شعاع دایره $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ را به دست آورید.

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{-4}{2}, -\frac{2}{2}) = (2, -1)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$$

اگر $O \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ مرکز دایره و R شعاع دایره باشد، محدوده X بازه $[\alpha - R, \alpha + R]$ و محدوده y بازه $[\beta - R, \beta + R]$ می باشد.

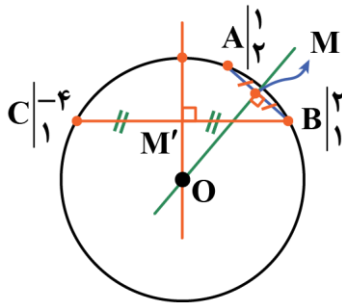


۲۵- اگر $A(1, 2)$ ، $B(2, 1)$ و $C(-4, 1)$ مختصات رئوس مثلث ABC باشند، شعاع دایره محیطی آن چقدر است؟
 (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) $\sqrt{12}$ (۴) $\sqrt{13}$

(متوسط - محاسباتی - زمان ۵ - هندسه ۳ صفحه ۴۳ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول



شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:

چون پیدا کردن معادله عمودمنصف وتر AB و عمودمنصف وتر BC راحت تر است، ابتدا عمودمنصف ها را محاسبه می کنیم:

$$m_{AB} = \frac{2-1}{1-2} = -1 \Rightarrow m_{AB \text{ عمودمنصف}} = 1$$

$$AB \text{ مختصات نقطه وسط } M \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1+2}{2} \\ \frac{2+1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow AB \text{ عمودمنصف } \Rightarrow y = x$$

معادله خط عمود بر آن به صورت $x = \alpha$ است. $m_{BC} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC \text{ مختصات نقطه وسط } M' \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{-4+2}{2} \\ \frac{1+1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow M'(-1, 1) \Rightarrow BC \text{ عمودمنصف } \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow y = x = -1 \Rightarrow O(-1, -1)$$

برخورد دو عمودمنصف، نقطه مرکز دایره را می دهد:

بنابراین شعاع دایره محیطی مثلث برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

روش دوم

مساحت مثلث را طبق درسنامه، از دترمینان ماتریس محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

-۶

از طرفی طول اضلاع مثلث برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(1-(-4))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$BC = |2 - (-4)| = 6$$

از طرفی در مثلثی که طول اضلاع آن a, b, c و مساحت آن S باشد، شعاع دایره محیطی از رابطه $R = \frac{abc}{4S}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{26} \times 6}{4 \times 3} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{13} \times 6}{12} = \sqrt{13}$$

 راهنمای زنگ بازی! (شعاع دایره محیطی مثلث)

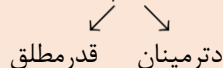
در مثلث $\triangle ABC$ با طول اضلاع a, b, c و مساحت S ، برای پیدا کردن شعاع دایره محیطی مثلث از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$R = \frac{abc}{4S}$$

 قَلَقِشو یاد بگیر! (محاسبه مساحت مثلث)

اگر نقاط $A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} x_C \\ y_C \end{vmatrix}$ مختصات ۳ رأس مثلث $\triangle ABC$ باشند، مساحت مثلث $\triangle ABC$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}$$



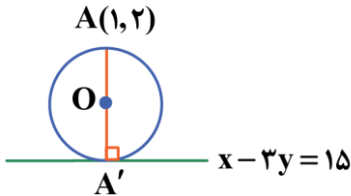
۲۶- کوچک ترین دایره‌ای که از نقطه $A(1,2)$ گذشته و بر خط $x-3y=15$ مماس باشد، از کدام نقطه زیر عبور می‌کند؟

- (۱) $(5,0)$ (۲) $(0,5)$ (۳) $(-2,3)$ (۴) $(1,-1)$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان‌بر) - هندسه ۳ صفحه ۴۳ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

مطابق شکل فرضی زیر، کوچک ترین دایره، دایره‌ای است که قطر آن AA' باشد (A' نقطه تماس دایره با خط $x-3y=15$ ، A همان نقطه داده شده و AA' قطر دایره است)، بنابراین:



فاصله A تا خط داده شده، همان قطر دایره است.

$$AA' = \frac{|1-3(2)-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10} \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

حال معادله AA' را می‌نویسیم:

$$m_{x-3y=15} = \frac{1}{3} \Rightarrow m_{AA'} = -3 \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 5$$

برخورد خط AA' با خط $x-3y=15$ مختصات نقطه A' را می‌دهد.

$$\begin{cases} x-3y=15 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=15 \\ 3y+9x=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow A'(3,-4)$$

نقطه O (مرکز دایره) وسط A و A' می‌باشد، بنابراین:

$$O = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_O = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_O = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره: } O(2,-1)$$

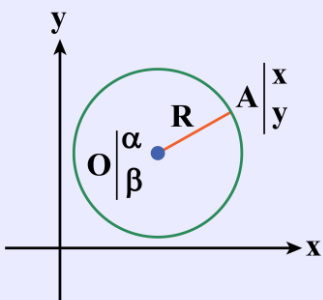
بنابراین معادله دایره برابر است با:

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{10}^2$$

از بین گزینه‌ها، فقط مختصات نقطه $(5,0)$ در معادله دایره صدق می‌کند.



دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی به نام مرکز دایره برابر مقدار ثابتی به نام شعاع دایره می‌باشد. دایره به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O, R)$ نشان می‌دهند.



نوشتن معادله دایره با داشتن مرکز

اگر مرکز دایره $O \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ و شعاع دایره R باشد، معادله دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = R$$

توان ۲ $\rightarrow$ معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز $O \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ و شعاع R

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

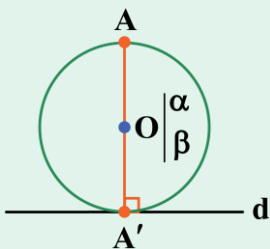
یه نمونه باحال ببین!

معادله دایره‌ای به مرکز $O \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و شعاع ۳ را بنویسید.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow \underbrace{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2}_{\text{معادله استاندارد}} \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0}_{\text{معادله گسترده}}$$

کوچک‌ترین دایره گذرنده از نقطه A

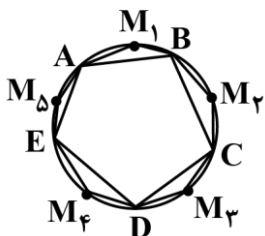
اگر نقطه A خارج خط d باشد، برای نوشتن معادله کوچک‌ترین دایره گذرنده از A و مماس بر خط d ، کافی است نقطه تماس خط و دایره را A' بنامیم و AA' قطری از این دایره باشد.



شیب خط d را قرینه و معکوس کرده تا شیب خط گذرنده از A و A' به دست آید، سپس معادله خط گذرنده از قطر AA' را نوشته و برخورد خط گذرنده از AA' و d نقطه A' را می‌دهد. از طرفی O وسط A و A' است.



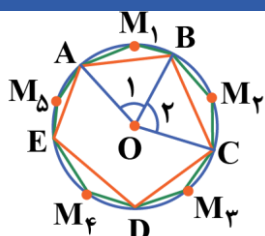
۲۷- در شکل زیر، تمام نقاط در شکل، روی محیط دایره واقع هستند. مجموع زوایای $\hat{M}_1$ تا $\hat{M}_5$ ($\sum_{i=1}^5 \hat{M}_i$) کدام است؟



- (۱) 540°
- (۲) 630°
- (۳) 720°
- (۴) 900°

(متوسط - مفهومی - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۱۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳



$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 &= \widehat{AM_1B} \\ \hat{M}_1 &= \frac{360^\circ - \widehat{AM_1B}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{AM_1B}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = 180^\circ - \frac{\hat{O}_1}{2}$$

$$\hat{M}_i = 180^\circ - \frac{\hat{O}_i}{2}$$

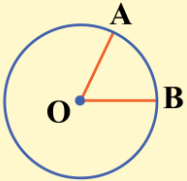
به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 + \hat{M}_5 = 5 \times 180^\circ - \left(\frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5}{2} \right) = 900^\circ - 180^\circ = 720^\circ$$

بنابراین:

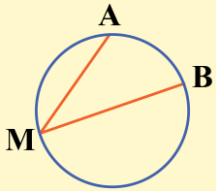
معرفی زوایا در دایره

زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره بوده و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند. اندازه زاویه مرکزی برابر اندازه کمان روبه‌روی آن است.



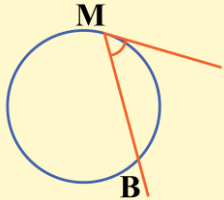
$$\hat{O} = \widehat{AB}$$

زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره بوده و اضلاع آن وترهای دایره هستند. اندازه زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان روبه‌روی آن است.



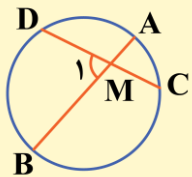
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

زاویه ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره بوده و یکی از اضلاع آن بر دایره مماس و ضلع دیگر آن وتر دایره باشد را زاویه ظلی می‌گوییم. اندازه زاویه ظلی برابر نصف کمان مقابل به آن است.



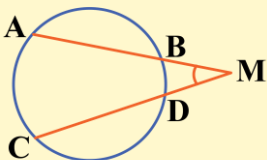
$$\hat{M} = \frac{\widehat{MB}}{2}$$

زاویه حاصل از برخورد دو وتر داخل دایره:



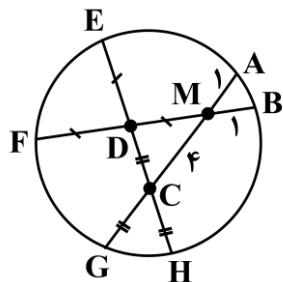
$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

زاویه حاصل از برخورد امتداد دو وتر خارج دایره:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$$

۲۸- در دایرهٔ مقابل، اگر $MA = MB = ۱$ ، $MC = ۴$ ، $DF = DM = DE$ و $CD = CG = CH$ باشد، آن گاه $DC - DE$ چقدر است؟



(۱) -۱

(۲) صفر

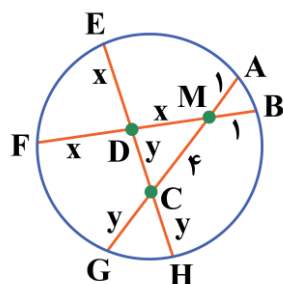
(۳) ۱

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

به کمک روابط طولی در دایره داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} DE \times DH = DF \times DB \Rightarrow x \times 2y = x \times (x+1) \xrightarrow{\substack{\div x \\ x \neq 0}} 2y = x+1 \\ MA \times MG = MB \times MF \Rightarrow 1 \times (y+4) = 1 \times 2x \Rightarrow y+4 = 2x \end{cases} \Rightarrow x=3, y=2$$

مقادیر x و y در رابطه $CG \times CA = CH \times CE$ صدق می کنند:

$$CG \times CA = CH \times CE \Rightarrow 2 \times 5 = 2 \times (2+3) \Rightarrow \checkmark$$

بنابراین مقادیر به دست آمده، قابل قبول هستند و داریم:

$$DC - DE = y - x = 2 - 3 = -1$$

روابط طولی در دایره

اگر AT در نقطه T بر دایره مماس باشد.	امتداد وترهای AB و CD خارج دایره در نقطه M همدیگر را قطع می کنند.	وترهای AB و CD داخل دایره یکدیگر را در نقطه M قطع می کنند.
$AT^2 = AB \times AC$	$MA \times MB = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$

۲۹- نقطه M خارج دایره C است. برای رسم دو مماس از نقطه M بر دایره، از خطکش و پرگار استفاده می‌کنیم. برای این منظور، چند بار باید از پرگار استفاده کنیم؟

۴ (۴)

۳ (۳)

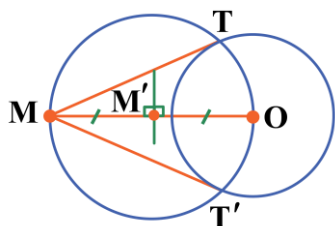
۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۱۹-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا عمود منصف MO را رسم می‌کنیم تا پاره خط MO را در نقطه‌ای مانند M' قطع کند. (برای این منظور دو بار از پرگار استفاده می‌کنیم). سپس دایره‌ای به مرکز M' و شعاع M'M رسم می‌کنیم (یک بار دیگر از پرگار استفاده می‌کنیم). سپس از نقاط تلاقی دو دایره یعنی T و T' به M وصل می‌کنیم تا خطوط مماس از M بر دایره رسم شوند، پس در مجموع ۳ بار از پرگار استفاده می‌کنیم.



۳۰- در دایره C(O, ۶)، فاصله مرکز دایره از وتر AB، ۲ برابر فاصله آن از وتر CD است. اگر $CD = 2AB$ باشد، آن‌گاه حاصل ضرب طول دو وتر چقدر است؟

۵۷ / ۶ (۴)

۵۷ / ۴ (۳)

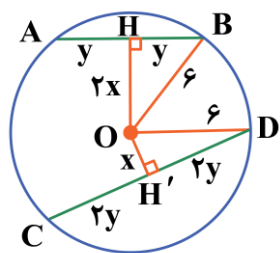
۵۷ / ۳ (۲)

۵۷ / ۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۱۳-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید. اطلاعات مسئله را روی شکل پیاده می‌کنیم، با به کارگیری قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه OHB و OH'D داریم:



$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = 6^2 \\ x^2 + (2y)^2 = 6^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + y^2 = x^2 + 4y^2 \Rightarrow 3x^2 = 3y^2 \Rightarrow x = y$$

بنابراین:

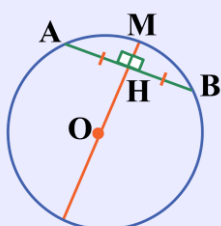
$$4x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow 5x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{5} \Rightarrow x = y = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

در نتیجه حاصل ضرب وترهای AB و CD برابر است با:

$$AB \times CD = 2y \times 4y = 8y^2 = 8 \times \frac{36}{5} = \frac{288}{5} = 57.6$$

عمود بر وتر

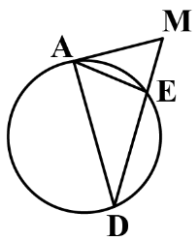
مطابق شکل، خطی که از مرکز دایره گذشته و بر وتر AB عمود است، وتر AB و کمان $\widehat{AB}$ را نصف می‌کند و برعکس.



$$OH \perp AB \Leftrightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AM} = \widehat{MB} \end{cases}$$



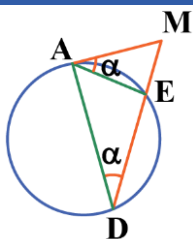
۳۱- مطابق شکل مقابل، پاره خط MA در نقطه A بر دایره مماس است. اگر $AD=3$ و $2MA=ME=2$ باشد، آن گاه AE کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۵ - ۱۱۰۱



$$\widehat{EAM} = \frac{AE}{2} \text{ ظلی}$$

$$\widehat{ADE} = \frac{AE}{2} \text{ محاطی}$$

زاویه های $\widehat{EAM}$ و $\widehat{ADE}$ برابرند، زیرا:

بنابراین دو مثلث $\triangle ADM$ و $\triangle AEM$ به حالت برابری دو زاویه، متشابهند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{EAM} = \widehat{ADE} \\ \widehat{M} = \widehat{M} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز)}} \triangle AEM \sim \triangle ADM \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{ME}{AM} = \frac{AM}{MD} \xrightarrow[\text{طبق فرض سوال: } \frac{ME}{MA} = \frac{2}{3}, AD=3]{\text{}} \frac{AE}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow AE = 2$$



۳۲- معادله سیال $32^\circ + n$ در $\mathbb{Z}$ جواب دارد. n کدام می تواند باشد؟

۸۴ (۴)

۸۳ (۳)

۸۲ (۲)

۸۱ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - گسسته صفحه ۲۶ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$(14, 21) \mid 32^\circ + n \Rightarrow 7 \mid 32^\circ + n \Rightarrow 32^\circ + n \equiv 0$$

$$3^3 \equiv -1 \Rightarrow 3^{18} \equiv 1 \Rightarrow 3^{20} \equiv 9 \equiv 2 \Rightarrow 2 + n \equiv 0 \Rightarrow n \equiv -2 \Rightarrow n = 7k - 2$$

بین گزینه ها فقط ۸۲ به فرم $7k - 2$ است.

برای این که معادله مذکور جواب داشته باشد شرط $(a, b) \mid c$ برقرار باشد:

$$(14, 21) \mid 32^\circ + n \Rightarrow 7 \mid 32^\circ + n$$

یعنی باید $32^\circ + n$ مضرب ۷ باشد که با برگرداندن آن به زبان هم نهستی یعنی باید $32^\circ + n \equiv 0$ باشد:

$$3^3 \equiv -1 \Rightarrow 3^{18} \equiv 1 \Rightarrow 3^{20} \equiv 9 \equiv 2$$

$$32^\circ + n \equiv 0 \Rightarrow 2 + n \equiv 0 \Rightarrow n \equiv -2 \Rightarrow n = 7k - 2$$

بین گزینه ها ۸۲ به فرم $7k - 2$ است.

شرط وجود جواب برای معادله سیال خطی

شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیال $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که:

$$(a, b) \mid c$$

۳۳- گراف ساده G از مرتبه ۱۴ و اندازه ۸۷ مفروض است. در آن گراف حداکثر مقدار ممکن برای $2\delta(G) - 3\Delta(G)$ کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۲ (۳)

۲۱ (۲)

۱۹ (۱)

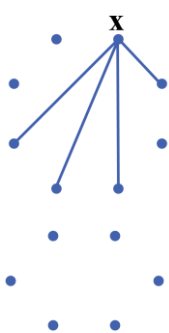
(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - گسسته صفحه ۳۷ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

K_{14} ، ۹۱ یال دارد پس با حذف ۴ یال از آن به G می‌رسیم. در هر صورت بزرگ‌ترین درجه ۱۳ باقی می‌ماند و باید کوچک‌ترین درجه را مینیمم کنیم که برای آن هر ۴ یال حذفی را از یک رأس برمی‌داریم:

$$3\Delta - 2\delta \xrightarrow{\text{حداقل مقدار } \delta} \text{Max}(3\Delta - 2\delta) \Rightarrow 3\Delta - 2\delta = 39 - 18 = 21$$



گراف کامل از مرتبه ۱۴ دارای ۹۱ یال است، بنابراین گراف داده شده گرافی است که از K_{14} به تعداد ۴ یال برداشته شود. قبل از برداشته شدن آن ۴ یال درجه تمام رؤوس برابر ۱۳ است که با برداشته شدن آن ۴ یال (به هر طریقی که برداشته شده باشند)، درجه تعدادی رأس همان ۱۳ باقی‌مانده و مقدار $\Delta(G)$ تحت هر شرایطی ۱۳ است، اما اگر آن ۴ یال را از یک رأس برداریم مقدار δ از ۱۳ به ۹ تقلیل یافته و مقدار $3\Delta - 2\delta$ برابر $39 - 18$ یعنی ۲۱ محاسبه می‌شود.

توجه!

اگر ۴ یال را از رؤوس مختلف حذف کنیم کمترین درجه به ۱۲ تبدیل می‌شود و مقدار به دست آمده برای $3\Delta - 2\delta$ دیگر بیشترین مقدار نیست.

برای همیشه به خاطر بسپار!

تعداد یال $\rightarrow$ اندازه

تعداد رأس $\rightarrow$ مرتبه

این دو تا رو هم قاطی نکنی!

کوچک‌ترین درجه $\rightarrow \delta(G)$

بزرگ‌ترین درجه $\rightarrow \Delta(G)$

تعداد یال‌های گراف کامل n رأسی

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

۳۴- a و b دو رأس ابتدایی و انتهایی گراف P_n هستند. بین دو رأس a و b در مکمل P_n چند مسیر به طول ۲ وجود دارد؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

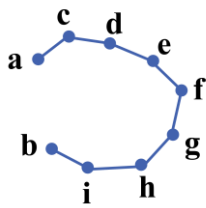
۷ (۱)

(آسان - ترکیبی - سریع) - گسسته صفحه ۳۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

مسیر به طول ۲ که ابتدایش a و انتهایش b باشد فقط نیاز به انتخاب رأس وسط دارد. برای این که مسیر در مکمل گراف باشد، باید یال‌هایی که تشکیل می‌شود در P_n نباشند. پس فقط رؤوس d, e, f, g و h می‌توانند رأس میانی باشند که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

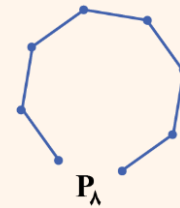
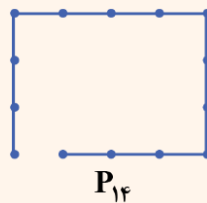
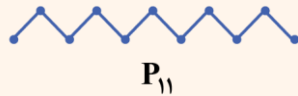
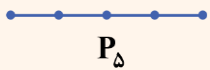


مسیر axb به طول ۲ در مکمل گراف P_q وجود دارد اگر و تنها اگر هر دو یال ax و xb در $\bar{P}_q$ باشند و این موقعی می تواند اتفاق بیافتد که هیچ کدام از آن دو یال در P_q نباشند، بنابراین x می تواند یکی از رأس d, e, f, g و h باشد.

گراف مسیر

گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد، گراف مسیر می نامیم و آن را با P_n نشان می دهیم.

چند نمونه باحال ببین!



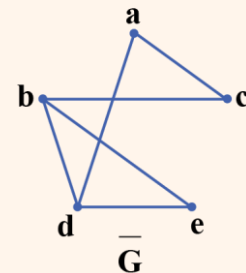
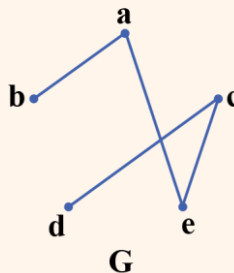
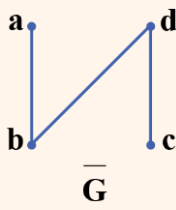
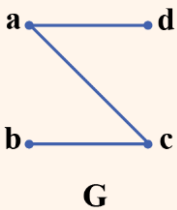
توجه!

دقت کنید که طول یک مسیر n رأسی، برابر با $n - 1$ است.

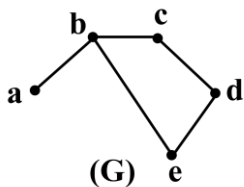
گراف مکمل

گراف دلخواه G با n رأس را در نظر بگیرید. اگر یال هایی که این گراف نسبت به گراف کامل n رأسی کم دارد را در یک گراف جدید با همان رأس های G در نظر بگیریم، مکمل گراف G به دست می آید. گراف مکمل آن را با G^c یا $\bar{G}$ نشان می دهیم.

چند نمونه باحال ببین!



۳۵- در چه تعداد از زیرگراف های مرتبه ۵ گراف مقابل، حاصل $N_G(b) \cup N_G[e]$ مجموعه ای ۵ عضوی می شود؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

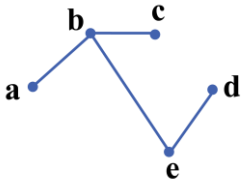
(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - گسسته صفحه ۳۶ - ۱۴۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

برای آن که تمام اعضای پنج گانه در مجموعه مورد اشاره باشند، لازم است هر ۴ یال ab, bc, be و ed در آن زیرگراف باشند، فقط یال cd اختیار دارد که باشد یا نباشد. که در مجموع دو حالت ایجاد می کند.

می‌دانیم که با توجه به گراف، $N_G(b)$ می‌تواند نهایتاً شامل دو عضو و به صورت $\{a, c\}$ باشد، از طرفی $N_G[e]$ نیز می‌تواند حداکثر شامل ۳ عضو $\{b, d, e\}$ باشد، پس برای این که $N_G(b) \cup N_G[e]$ شامل ۵ عضو باشد، باید هر دو مورد اتفاق بیافتد. برای آن لازم است که رأس b حتماً به a و c وصل باشد و رأس e به b و d وصل باشد. پس حتماً در زیر گراف باید یال‌های ab ، bc ، be و ed وجود داشته باشند. اما وجود یا عدم وجود یال cd تأثیری بر شرط ما ندارد. پس در کل دو زیرگراف با شرایط مورد نظر وجود دارد.



همسایگی باز و بسته یک رأس



همسایگی باز رأس a متشکل از تمام رأس‌هایی است که به رأس a متصل هستند. آن را با $N_G(a)$ نشان می‌دهیم.

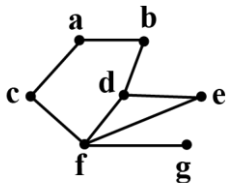
$$N_G(a) = \{b \in V(G) \mid ab \in E(G)\}$$

همسایگی بسته رأس a متشکل از تمام رأس‌هایی است که به رأس a متصل هستند به همراه خود رأس a . آن را با $N_G[a]$ نشان می‌دهیم.

$$N_G[a] = \{b \in V(G) \mid ab \in E(G)\} \cup \{a\}$$



۳۶- در گراف مقابل با اضافه شدن یال ij حاصل $A = p^2 - q + \Delta - 2\delta$ برابر ۴۲ شده است. برای یال ij چند جواب مختلف یافت می‌شود؟



- (۱) ۶
- (۲) ۵
- (۳) ۴
- (۴) ۲

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - گسسته صفحه ۳۷ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

قبل از اضافه شدن یال ij حاصل A برابر $A = 7^2 - 8 + 4 - 2 = 43$ است. با اضافه شدن یال ij ، مقدار q از ۸ به ۹ افزایش یافته و مقدار p تغییر نمی‌کند، بنابراین $\Delta - 2\delta$ نباید تغییر کند و آن موقعی میسر است که درجه رأس f و g تغییر نکند. بنابراین برای رسم یال ij باید از رأس a, b, c, d, e استفاده کرد. گراف کامل از مرتبه ۵ شامل ۱۰ یال است که چون ۴ یال ac, ab, bd, de در آن گراف موجودند، بنابراین برای رسم یال ij به تعداد $10 - 4 = 6$ یعنی ۶ جواب، وجود خواهد داشت.



۳۷- چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟

(الف) نمونه‌گیری سامانمند نوعی نمونه‌گیری خوشه‌ای محسوب می‌شود.

(ب) اگر تفاوت داده‌ها در هر یک از گروه‌ها نوسان زیاد داشته ولی از گروهی به گروه دیگر نوسان میانگین کم باشد، آن‌گاه برای نمونه‌گیری، نمونه‌گیری طبقه‌ای مناسب‌تر است.

(ج) واحد آماری زیر مجموعه‌ای از جامعه است.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۱۰۱ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۱

هیچ کدام از گزاره‌ها صحیح نیستند. هر سه گزاره بنابر دلایل زیر **نادرست** هستند:

بررسی موارد:

(الف) نمونه‌گیری سامانمند نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است نه خوشه‌ای.

(ب) برای توضیحات اشاره شده نمونه‌گیری خوشه‌ای مناسب‌تر است نه طبقه‌ای.

(ج) واحد آماری **عضوی** از جامعه است نه زیرمجموعه.

روش‌های نمونه‌گیری

روش‌های نمونه‌گیری تصادفی (احتمالی) عبارتند از:

(۱) **نمونه‌گیری تصادفی ساده:** در این روش از الگوی خاصی استفاده نمی‌شود و هر کدام از اعضای جامعه، با احتمال برابر ممکن است در نمونه انتخاب شوند.

یه نمونه باحال ببین!

قرعه‌کشی بین افراد شرکت‌کننده در یک مسابقه

(۲) **نمونه‌گیری خوشه‌ای:** طبق ویژگی‌های اعضای جامعه، جامعه دارای خوشه‌هایی مجزا است که خود این خوشه‌ها از نظر تعداد لزوماً با هم برابر نیستند. ابتدا از بین خوشه‌ها تعدادی خوشه انتخاب می‌شود و اعضای خوشه‌های انتخاب شده اعضای نمونه را تشکیل می‌دهند.

یه نمونه باحال ببین!

برای انتخاب یک نمونه از شهروندان تهران، مناطق مختلف شهر را به منزله خوشه‌ها در نظر می‌گیریم. سپس تعدادی از مناطق شهرداری از بین ۲۲ منطقه را انتخاب کرده و در نهایت تمام شهروندان مناطق انتخاب‌شده را به عنوان نمونه معرفی می‌کنیم.

(۳) **نمونه‌گیری طبقه‌ای:** در این روش ابتدا بر اساس یک معیار، جامعه به طبقاتی مجزا تقسیم می‌شود. سپس از هر طبقه یک نمونه تصادفی ساده انتخاب می‌شود. (پس احتمال انتخاب اعضای هم طبقه با هم مساوی است.)

یه نمونه باحال ببین!

در یک شرکت ۵ مدیر، ۱۵ کارمند و ۳۰ کارگر وجود دارد. طبقات را مدیران، کارمندان و کارگران در نظر می‌گیریم. حال برای انتخاب یک نمونه ۱۰ تایی از این شرکت از طبقه مدیران ۱، از طبقه کارمندان ۳ و از طبقه کارگران ۶ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم.

توجه!

نسبت نمونه‌گیری در کلیه طبقات با نسبت نمونه‌گیری در کل جامعه یکسان و برابر است. بنابراین تعداد نمونه در هر طبقه متناسب با بزرگی آن طبقه است.

(۴) **نمونه‌گیری سامانمند (سیستماتیک):** این روش نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن تعداد اعضای تمام طبقات با هم برابر است. از طبقه اول به تصادف واحد آماری انتخاب می‌شود و دقیقاً با همان روند از باقی طبقات نیز نمونه‌گیری انجام می‌شود تا نمونه کامل شود.

یه نمونه باحال ببین!

فرض کنید در یک کارخانه ۱۰۰۰ نفر مشغول به کار هستند و یک نمونه ۱۰۰ عضوی از این کارخانه می‌خواهیم. اسامی افراد به صورت لیستی و بر اساس الفبا مرتب شده‌اند. برای اجرای نمونه‌گیری سیستماتیک از ۱۰ شماره اول یک نقطه را برای شروع در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال ۶. از شماره ۶ به بعد هر ۱۰ نفر را به ترتیب از لیست انتخاب می‌کنیم، که لیست به صورت انتخاب نفرات ۶، ۱۶، ۲۶، ۳۶، ۴۶ و ... می‌شود و تا زمانی که ۱۰۰ نمونه را جمع آوری نمایید نمونه گیری را ادامه می‌دهید.

توجه!

در نمونه‌گیری سیستماتیک اعضای هر طبقه لزوماً از نظر ویژگی شبیه به هم نیستند و احتمال آریبی وجود دارد.

نمونه‌گیری غیرتصادفی (نمونه‌گیری غیراحتمالی)

در یک نمونه‌گیری غیر تصادفی، افراد بر اساس معیارهای غیرتصادفی انتخاب می‌شوند و هر فرد شانس یکسان و معین انتخاب شدن در نمونه را ندارد. این نوع از نمونه‌گیری از نظر هزینه و دسترسی آسان‌تر است. اما در آن‌ها **خطر آریبی** بالاتر می‌باشد. از این روش نمونه‌گیری نمی‌توانید استنباط آماری معتبری را درباره کل جامعه داشته باشید. استفاده از نمونه‌گیری غیرتصادفی چه در مرحله طراحی و چه در مرحله اجرا ساده‌تر از نمونه‌گیری تصادفی است و به زمان و سرمایه کمتری نیاز دارد.

جمع‌بندی روش‌های نمونه‌گیری



۳۸- در یک جامعه ۶ عضوی با مقادیر ۳، ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۱۹ و ۲۲ اگر در انتخاب نمونه‌ای دو عضوی اعضای ۱۱ و ۱۹ انتخاب شود و پارامتر و آماره را به ترتیب a و b بنامیم، آن‌گاه $3a + b$ به کدام عدد بخش پذیر است؟

۶۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۵۹ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۱۲ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$\text{پارامتر} = \frac{3 + 11 + 12 + 17 + 19 + 22}{6} = 14$$

$$\text{آماره} = \frac{11 + 19}{2} = 15$$

$$\Rightarrow 3a + b = 3 \times 14 + 15 = 57 = 3 \times 19$$

بر اساس فعالیت کتاب درسی، مشخصه عددی که برای محاسبه پارامتر و آماره در نظر می‌گیریم میانگین است:

$$\text{میانگین جامعه} = \frac{3 + 11 + 12 + 17 + 19 + 22}{6} = 14 = \text{پارامتر}$$

$$\text{میانگین نمونه} = \frac{11 + 19}{2} = 15 = \text{آماره}$$

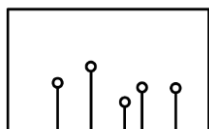
$$\Rightarrow 3a + b = 3 \times 14 + 15 = 57$$

چون $57 = 3 \times 19$ پس با توجه به گزینه‌ها ۱۹ پاسخ مورد نظر است.

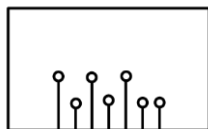
قلقلشو یاد بگیر!

هر مشخصه عددی (مانند میانگین، میانه، مد، واریانس و ...) وقتی برای **کل جامعه** محاسبه شود **پارامتر (پارامتر جامعه)**، و وقتی برای یک **نمونه** محاسبه شود **آماره (آماره نمونه)** است.

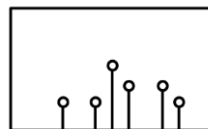
۳۹- در جامعه ۲، ۴، ۸، ۱۰، ۱۰، ۱۰ جدول احتمال برای نمونه‌ای با اندازه $n = 2$ کدام است؟



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

به تعداد $\binom{5}{2}$ یعنی ۱۰ نمونه دو عضوی وجود دارد که میانگین اعضای آن ۱۰ نمونه از کوچک به بزرگ به صورت ۳، ۵، ۶، ۶، ۷، ۷، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰ است، بنابراین در محور افقی اعداد ۳، ۵، ۶، ۷، ۹، ۱۰ و در محور عمودی احتمالات آن‌ها نوشته می‌شود که احتمالات موردنظر به ترتیب $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ است که در گزینه ۲ به درستی نمایش داده شده است.

به تعداد $\binom{5}{2}$ یعنی ۱۰ نمونه دو عضوی وجود دارد:

۳ ← میانگین ۲، ۴

۶ ← میانگین ۴، ۸

۹ ← میانگین ۸، ۱۰

۱۰ ← میانگین ۱۰، ۱۰

۵ ← میانگین ۲، ۸

۷ ← میانگین ۴، ۱۰

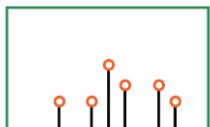
۹ ← میانگین ۸، ۱۰

۶ ← میانگین ۲، ۱۰

۷ ← میانگین ۴، ۱۰

۶ ← میانگین ۲، ۱۰

میانگین اعضای این ۱۰ نمونه از کوچک به بزرگ به صورت ۳، ۵، ۶، ۶، ۷، ۷، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰ است، بنابراین در محور افقی اعداد ۳، ۵، ۶، ۷، ۹، ۱۰ و در محور عمودی احتمالات آن‌ها نوشته می‌شود. احتمالات موردنظر به ترتیب $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ است. پس نمودار به صورت زیر است که در گزینه ۲ به درستی نمایش داده شده است.



۴۰- بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جامعه‌ای به صورت $(18/2, 19/8)$ است. اگر بین n (تعداد اعضای نمونه) و σ (انحراف معیار جامعه)

رابطه $5\sigma + n = 48$ برقرار باشد، آنگاه رقم یکان مجموع اعضای نمونه کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۲

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - آمار و احتمال صفحه ۱۱۶ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که بازه برآورد میانگین با اطمینان بیش از ۹۵٪ به صورت $(\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ است، داریم:

$$(\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) = (18/2, 19/8)$$

$$\Rightarrow \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = 19/8 - 18/2 = 1/6 \Rightarrow \sigma = \frac{2}{5}\sqrt{n} \quad (I)$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$5\sigma + n = 48 \xrightarrow{(I)} 2\sqrt{n} + n = 48 \Rightarrow n + 2\sqrt{n} - 48 = 0 \Rightarrow (\sqrt{n} - 6)(\sqrt{n} + 8) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 6 \Rightarrow n = 36$$

$$\bar{x} = \frac{19/8 + 18/2}{2} = 19 \Rightarrow \sum_{i=1}^{36} x_i = 36 \times 19 = 684$$

 بازه برآورد میانگین با اطمینان بیش از ۹۵ درصد

بازه برآورد میانگین با اطمینان بیش از ۹۵٪ به فرم زیر است:

$$\left[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

که n حجم نمونه و σ انحراف معیار جامعه و $\bar{x}$ میانگین نمونه می‌باشد.

نتیجه طول بازه برآورد میانگین برابر است با:

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

فیزیک ۲: الکتریسیته ساکن (تا قبل از خازن) - صفحه‌های ۱ تا ۳۲
فیزیک ۳: دینامیک و حرکت دایره‌ای (از نیروی کشش طناب تا انتهای فصل ۲) - صفحه‌های ۴۴ تا ۶۰

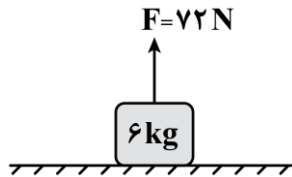
بودجه‌بندی
این آزمون

پایه یازدهم: در مجموع ۲ یا ۳ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایه دوازدهم: در مجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۴۱- در شکل زیر جسمی به جرم 6 kg که بر روی سطح در حال سکون قرار دارد را با طنابی سبک و نیروی کشش $F = 72\text{ N}$ به سمت

بالا می‌کشیم. سرعت جسم پس از ۳ ثانیه چند متر بر ثانیه می‌شود؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



۶ (۲)

۲ (۱)

۳۶ (۴)

۱۲ (۳)

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۴۲ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

ابتدا شتاب حرکت جسم را به دست می‌آوریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - mg = ma \Rightarrow 72 - 60 = 6a \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گام آخر

چون جسم از حال سکون به حرکت درمی‌آید، سرعت آن پس از ۳ ثانیه برابر است با:

$$v = at + v_0 = 2 \times 3 + 0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۴۲- جسمی به جرم 2 kg توسط طنابی با جرم ناچیز از سقف یک آسانسور آویزان شده است. تفاوت اندازه نیروی کشش طناب

در حالتی که آسانسور با شتاب ثابت $6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ به سمت بالا شروع به حرکت کند و در حالتی که با تندی ثابت $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ پایین بیاید،

چند نیوتون است؟

۰/۴ (۴)

۱/۶ (۳)

۲ (۲)

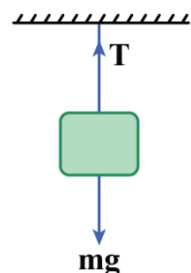
۱/۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۴۵ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

در هر دو حالت نیروی کشش طناب را به دست می‌آوریم:



$$F_{\text{net}y_1} = ma \Rightarrow T_1 - mg = ma$$

$$T_1 = mg + ma = m(g + a) \quad \text{حرکت با شتاب } 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ به سمت بالا}$$

$$\Rightarrow T_1 = m(g + a) = 2(g + 6)$$

$$F_{\text{net}y_2} = ma = 0 \Rightarrow T_2 = mg$$

$$\Rightarrow T_2 = mg = 2g \quad \text{حرکت با سرعت ثابت } 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ به سمت پایین } (a = 0)$$

تفاوت نیروی کشش طناب در دو حالت برابر است با:

$$T_1 - T_2 = 2(g + 0.6) - 2g = 2 \times 0.6 = 1.2 \text{ N}$$

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۲

۵۱- فنری به طول ۴۲ cm را به سقف آسانسور می‌بندیم و از انتهای آن وزنه ۳ کیلوگرمی آویزان می‌کنیم. اگر ثابت فنر $400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ باشد و

آسانسور با شتاب ثابت رو به پایین $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ در حرکت باشد، طول فنر در این شرایط چند سانتی‌متر است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

- (۱) ۴۹ (۲) ۵۱ (۳) ۴۸ (۴) ۴۶

پاسخ تشریحی:

با توجه به شتاب آسانسور برای جسم متصل به فنر در داخل آسانسور می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{net}} &= m\vec{a} \\ \vec{F}_{\text{net}} &= mg - F_e \rightarrow mg - F_e = ma \\ \frac{m=3\text{kg}}{a=2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} &\rightarrow 3(10) - F_e = 3(2) \\ \Rightarrow F_e &= 24 \text{ N} \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به قانون هوک می‌توان نوشت:

$$F_e = kx \rightarrow \frac{F_e=24\text{N}}{k=400\frac{\text{N}}{\text{m}}} \rightarrow 24 = 400 \times x \Rightarrow x = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

$$x = L_2 - L_1 \Rightarrow 6 = L_2 - 42 \Rightarrow L_2 = 48 \text{ cm}$$

بنابراین طول فنر در این شرایط به ۴۸ cm می‌رسد.

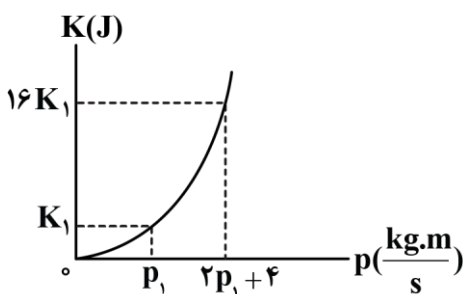
پاسخ: گزینه ۳



۴۳- نمودار انرژی جنبشی جسمی به جرم ۲۰۰g بر حسب اندازه تکانه آن مطابق شکل است. مقادیر p_1 و K_1 به ترتیب از راست به

چپ در SI کدام است؟

- (۱) ۴ و ۴۰
(۲) ۲ و ۱۰
(۳) ۲ و ۴۰
(۴) ۴ و ۱۰



(متوسط - نموداری - استاندارد) - صفحه ۴۷ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم انرژی جنبشی جسمی به جرم m بر حسب تکانه آن از رابطه $K = \frac{p^2}{2m}$ به دست می‌آید؛ بنابراین به کمک اطلاعات روی نمودار داریم:

$$\left. \begin{aligned} 16K_1 &= \frac{(2p_1 + 4)^2}{2m} \\ K_1 &= \frac{p_1^2}{2m} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم دو معادله}} 16 = \frac{(2p_1 + 4)^2}{p_1^2} \Rightarrow 4 = \frac{2p_1 + 4}{p_1} \Rightarrow 4p_1 = 2p_1 + 4 \Rightarrow p_1 = 2 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

$$K_1 = \frac{p_1^2}{2m} \rightarrow K_1 = \frac{p_1^2}{2 \times 0.2} = 10 \text{ J}$$



انرژی جنبشی یک جسم را می‌توان برحسب تکانه نیز نوشت:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}$$

آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۹

۴۸- اگر جرم جسم B، $\frac{5}{8}$ جرم جسم A و تکانه جسم A، $\frac{4}{3}$ تکانه جسم B باشد، نسبت انرژی جنبشی جسم A به انرژی جنبشی جسم B، کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{9}$ (۲) $\frac{9}{10}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ تشریحی:

برای مقایسه انرژی جنبشی دو جسم می‌توان نوشت:

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2 \times \left(\frac{m_B}{m_A}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{5}{8} = \frac{10}{9}$$

پاسخ: گزینه ۱

آزمون سراسری تیرماه ۱۴۰۱

۷۳- دو متحرک A و B در یک مسیر مستقیم و در یک جهت حرکت می‌کنند. تکانه آن‌ها با هم برابر و انرژی جنبشی A، ۴ برابر انرژی جنبشی B است. اگر جرم A، ۲ kg باشد، جرم B چند کیلوگرم است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ تشریحی:

با کمک رابطه ارائه شده می‌توان نوشت:

$$\frac{K_A}{K_B} = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2 \times \left(\frac{m_B}{m_A}\right) \Rightarrow \frac{m_B}{2} = 4 \Rightarrow m_B = 8 \text{ kg}$$

پاسخ: گزینه ۱



۴۴- شکل زیر، صحنه‌ای از یک تصادف را نشان می‌دهد که در آن خودرویی به جرم ۱۲۰۰ kg به دیواری برخورد کرده و سپس برمی‌گردد. اگر تندی اولیه و نهایی خودرو به ترتیب $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ و $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ باشد و تصادف ۰/۱۵ s طول بکشد، نیروی متوسط وارد بر خودرو در این مدت زمان چند نیوتون است؟



- (۱) $-10^5 \vec{i}$ (۲) $-1/4 \times 10^5 \vec{i}$
(۳) $10^5 \vec{i}$ (۴) $1/4 \times 10^5 \vec{i}$

برای محاسبه نیروی متوسط وارد شده بر خودرو، با توجه به رابطه زیر، می توان نوشت:

$$v_1 = +54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = +15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = -9 \frac{\text{km}}{\text{h}} = -2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{1200(-2.5 - 15)}{0.15} = \frac{1200 \times (-17.5)}{0.15} = -1.4 \times 10^5 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{av} = (-1.4 \times 10^5 \text{ N}) \vec{i}$$

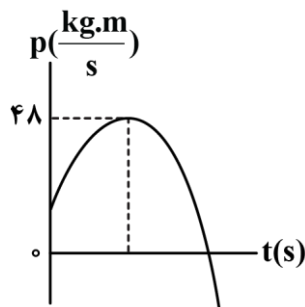


تغییرات تکانه برابر است با:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}_{av} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$$



۴۵- نمودار تکانه - زمان جسمی به جرم ۳ kg که با سرعت اولیه $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در جهت محور x شروع به حرکت می کند، مطابق سهمی شکل زیر است. اگر نیروی متوسط وارد بر این متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3\text{s}$ تا $t_2 = 9\text{s}$ برابر صفر باشد، اندازه نیروی متوسط وارد بر این متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت چند نیوتون است؟



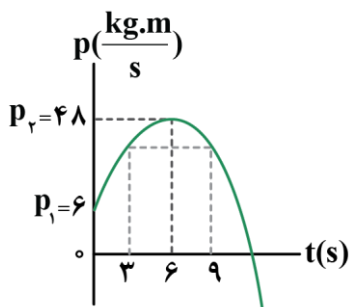
۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۲۱ (۴)

کلام اول



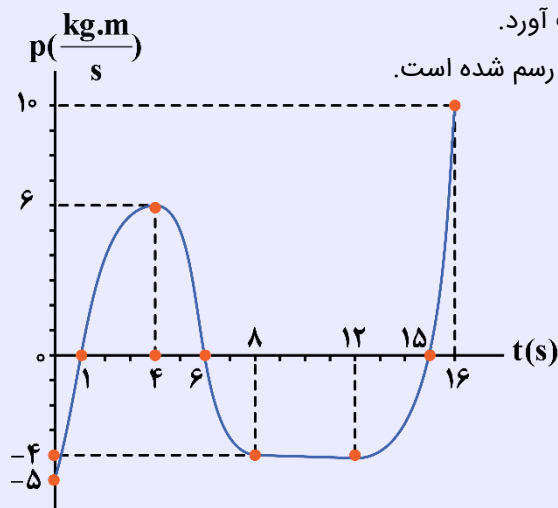
با توجه به این که نیروی متوسط وارد بر متحرک از لحظه $t_1 = 3\text{s}$ تا $t_2 = 9\text{s}$ برابر صفر است، طبق رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ، متوجه می شویم که تکانه متحرک در این لحظات باهم برابر است. با توجه به این که سهمی نسبت به رأس آن متقارن است، متوجه می شویم که لحظه رأس سهمی برابر $t = 6\text{s}$ می باشد. از طرفی تکانه اول متحرک برابر است با:

$$p_1 = mv_1 = 3 \times 2 = 6 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

کلام آخر

نیروی متوسط وارد بر متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{48 - 6}{6 - 0} = \frac{42}{6} = 7 \text{ N}$$



در ادامه می‌خواهیم ببینیم که از روی نمودار تکانه - زمان می‌توان چه نتایجی به دست آورد.
نمودار تکانه - زمان مقابل را به عنوان مثال در نظر بگیرید که برای جسمی به جرم 2 kg رسم شده است.

۱- تکانه در زمان‌های مختلف:

ساده‌ترین چیزی که از نمودار تکانه - زمان می‌فهمیم، تکانه جسم در لحظات مختلف است. مثلاً در نمودار داده شده، تکانه در لحظه $t = 1\text{ s}$ برابر صفر و در لحظه $t = 4\text{ s}$ برابر $6 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$ است.

۲- سرعت در لحظات مختلف:

اگر جرم جسم را داشته باشیم، به راحتی با استفاده از رابطه $p = mv$ ، سرعت آن را به دست می‌آوریم.

$$t = 1\text{ s}: p = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$t = 4\text{ s}: p = 6 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \Rightarrow v = \frac{p}{m} = \frac{6}{2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

دقت کنید هرگاه سرعت یا تکانه، مثبت باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و هرگاه سرعت یا تکانه، منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۳- نیروی خالص متوسط وارد بر جسم:

نیروی خالص متوسط وارد بر جسم از رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ به دست می‌آید که در واقع برابر شیب خط واصل دو نقطه از نمودار تکانه - زمان است. به عنوان مثال در بازه زمانی $1\text{ s} \leq t \leq 4\text{ s}$ داریم:

$$\begin{cases} t = 1\text{ s}: p = 0 \\ t = 4\text{ s}: p = 6 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{4 - 1} = 2\text{ N}$$

۴- نیروی خالص وارد بر جسم در هر لحظه:

شیب خط مماس بر نمودار تکانه - زمان در هر لحظه برابر نیروی خالص وارد بر جسم در آن لحظه است. مثلاً در نمودار داده شده، نیروی خالص وارد بر جسم در بازه‌های زمانی $0 < t < 4\text{ s}$ و $12\text{ s} < t < 16\text{ s}$ مثبت است (در جهت محور x است) و در بازه $4\text{ s} < t < 12\text{ s}$ منفی است (در خلاف جهت محور x است) و در بازه $1\text{ s} < t < 12\text{ s}$ صفر است. دقت کنید که در لحظه $t = 4\text{ s}$ ، علامت شیب نمودار، تغییر کرده است، یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم عوض شده است.

۵- اگر جرم جسم را داشته باشیم، علاوه بر محاسبه نیرو از نکات قبل، می‌توانیم با کمک قانون دوم نیوتون، شتاب را هم محاسبه کنیم.

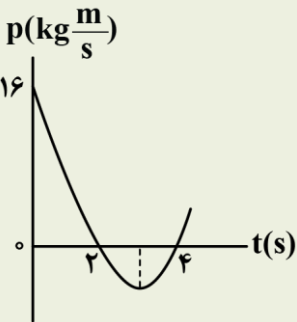
۶- تندشونده و کندشونده بودن حرکت:

هرگاه نمودار از محور افقی دور شود، حرکت، تندشونده و هرگاه به محور افقی نزدیک شود، حرکت، کندشونده است. مثلاً در نمودار داده شده، در بازه‌های زمانی $0 < t < 1\text{ s}$ ، $4\text{ s} < t < 6\text{ s}$ و $12\text{ s} < t < 15\text{ s}$ حرکت، کندشونده و در بازه‌های $1\text{ s} < t < 4\text{ s}$ ، $6\text{ s} < t < 8\text{ s}$ و $15\text{ s} < t < 16\text{ s}$ حرکت تندشونده است. دقت کنید که در بازه زمانی $8\text{ s} < t < 12\text{ s}$ ، حرکت با سرعت ثابت انجام شده است.

- ۷- به طور کلی به یاد داشته باشید که اگر جرم جسم را بدانیم، می‌توانیم با تقسیم محور عمودی بر جرم، نمودار تکانه - زمان را به نمودار سرعت - زمان تبدیل کنیم و در نتیجه همه نکاتی که از نمودار سرعت - زمان قابل استنباط است را می‌توانیم بفهمیم.
- ۸- دقت کنید که اگر به جای نمودار تکانه - زمان، معادله تکانه - زمان را هم به ما بدهند، به طور مشابه می‌توانیم همه موارد بالا را به دست آوریم. گاهی هم می‌توانیم معادله داده شده را رسم کنیم و با کمک نمودار به دست آمده به سؤالات پاسخ دهیم.

آزمون سراسری تجربی ۱۴۰۲

۵۳- نمودار تکانه - زمان جسمی که روی محور X با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 5s$ چند نیوتون است؟



- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

پاسخ تشریحی:

در متن سؤال به اشتباه گفته شده است که شتاب حرکت ثابت است، ولی می‌دانیم که در حرکت شتاب ثابت، نمودار سرعت - زمان، خطی است و در نتیجه نمودار تکانه - زمان هم باید خطی باشد؛ بنابراین سؤال داده شده غیرعلمی و نادرست است. برای آن که بتوان سؤال را حل کرد، با توجه به شکل فرض می‌کنیم نمودار سهمی باشد. معادله تکانه - زمان برابر است با:

$$p = 2(t-2)(t-4) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3s : p_1 = -2 \frac{kg \cdot m}{s} \\ t_2 = 5s : p_2 = 6 \frac{kg \cdot m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{6 - (-2)}{2} = 4 N$$

پاسخ: گزینه ۲



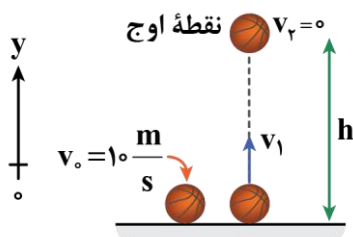
- ۴۶- یک توپ بسکتبال به جرم $2kg$ با سرعت $10 \frac{m}{s}$ به زمین برخورد می‌کند. اگر بعد از برخورد توپ با زمین، تا ارتفاع $3/2$ متری زمین بالا بیاید، بزرگی تغییر تکانه توپ در بازه زمانی برخورد توپ با زمین در SI چقدر است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$ و از مقاومت هوا صرف نظر شود).

- (۱) ۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۴ (۴) ۶

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۴۷ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

کلم اول



اگر جهت بالا را مثبت فرض کنیم، با استفاده از معادله مستقل از زمان (سرعت - جابه‌جایی) حرکت شتاب ثابت، سرعت جداسدن توپ از زمین را محاسبه می‌کنیم:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2g\Delta y$$

$$\Rightarrow 0 - v_0^2 = 2(-10)(3/2) \Rightarrow v_1^2 = 64 \xrightarrow[\text{بالا است.}]{\text{سرعت رو به}} v_1 = 8 \frac{m}{s}$$

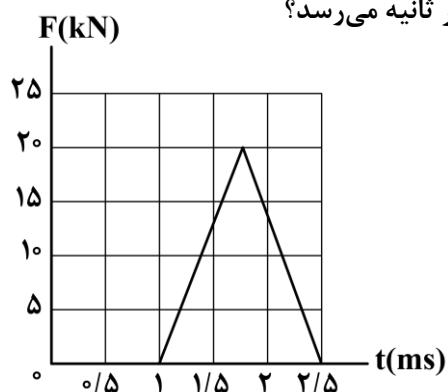
به کمک رابطه تغییر تکانه برای بازه زمانی برخورد داریم:

$$\Delta p = m\Delta v$$

$$\Rightarrow |\Delta p| = 2|8 - (-10)| = 36 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$



۴۷- شکل زیر، منحنی نیروی خالص بر حسب زمان را برای توپ بیسبال ساکنی به جرم ۵۰۰ گرم که با چوب بیسبال به آن ضربه زده شده است، نشان می‌دهد. تندی حرکت توپ بیسبال پس از ضربه به آن، به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟



۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

۳۰ (۴)

(آسان - نموداری - استاندارد) - صفحه ۴۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۴

کلام اول

مساحت زیر نمودار $F-t$ برابر تغییرات تکانه است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

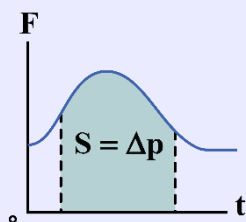
$$\Delta p = \frac{20 \times 10^3 \times (2/5 - 1) \times 10^{-3}}{2} = 15 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

کلام آخر

حالا با استفاده از رابطه تغییر تکانه، تندی توپ پس از ضربه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta p = m\Delta v \Rightarrow 15 = 0.5(v - 0) \Rightarrow v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

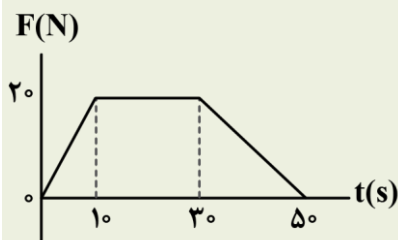
نمودار نیرو - زمان در تکانه



نیرو برابر شیب نمودار $p-t$ است؛ به عبارت دیگر نیرو همان آهنگ تغییر تکانه است، یعنی $\vec{F}_{\text{net}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$.
سطح زیر نمودار نیرو - زمان در یک بازه معین برابر تغییرات تکانه در همان بازه زمانی است.

آزمون سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۱

۵۵- نمودار نیرو - زمان متحرکی به صورت زیر است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۵۰ ثانیه داده شده، چند نیوتون است؟



۱۰ (۱)

۱۲/۵ (۲)

۱۴ (۳)

۱۷/۵ (۴)

پاسخ تشریحی:

مساحت بین نمودار $F-t$ و محور t ، تغییر تکانه متحرک را نشان می‌دهد.

$$\Delta p = S = \frac{50 + (30 - 10)}{2} \times 20 = 700 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

$$F_{\text{net}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{700}{50} = 14 \text{ N}$$

پاسخ: گزینه ۳



۴۸- به جسمی به جرم 3 kg که روی محور x به حال سکون قرار دارد، نیروی خالص متغیری با رابطه $F = 2t - 2$ در SI وارد شده

است. تکانه جسم در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، $24 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$ خواهد شد؟

۱۰ (۴)

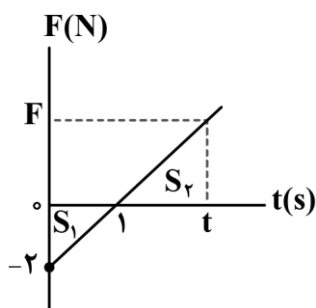
۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۴۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲



ابتدا نمودار $F-t$ را رسم می‌کنیم. همچنین می‌دانیم مساحت زیر نمودار نیرو - زمان، بیانگر تغییر تکانه است.

پس باید مساحت زیر نمودار $\Delta p = 24 - 0 = 24 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ شود:

$$-S_1 + S_2 = 24$$

$$\Rightarrow \frac{-2 \times 1}{2} + \frac{(t-1)(2t-2)}{2} = 24 \Rightarrow (t-1)^2 = 25 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۷- معادله تکانه جسمی برحسب زمان در SI به صورت $P = 15t^2 + 5t$ می‌باشد. نیروی خالص (برایند) متوسط وارد بر جسم در بازه زمانی

$t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ چند نیوتون است؟

۱۹۰ (۴)

۱۴۰ (۳)

۸۵ (۲)

۷۰ (۱)

پاسخ تشریحی:

تکانه جسم را در دو لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$t_1 = 3 \text{ s} \Rightarrow p_1 = 15 \times 3^2 + 5 \times 3 = 150 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

$$t_2 = 6 \text{ s} \Rightarrow p_2 = 15 \times 6^2 + 5 \times 6 = 570 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

نیروی برایند متوسط وارد بر جسم برابر است با:

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{570 - 150}{6 - 3} = 140 \text{ N}$$

پاسخ: گزینه ۳



۴۹- اگر فاصله جسمی از سطح زمین $\frac{1}{3}$ برابر شود، شتاب گرانشی ناشی از زمین بر آن ۴۴ درصد افزایش می‌یابد. فاصله جسم از

مرکز زمین در حالت اول، چند برابر شعاع زمین است؟

۳ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

به کمک رابطه $g = G \frac{M_e}{(R_e + h)^2}$ داریم:

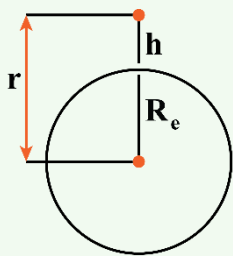
$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2} \right)^2 \xrightarrow{g_2 = 1/44 g_1, h_2 = \frac{1}{3} h_1} 1/44 = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + \frac{1}{3} h_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow 1/22 = \frac{R_e + h_1}{R_e + \frac{1}{3} h_1} \Rightarrow 1/22 R_e + 0/44 h_1 = R_e + h_1 \Rightarrow 0/22 R_e = 0/44 h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{3} R_e$$

$$\xrightarrow{\text{فاصله جسم از مرکز زمین: } r = R_e + h} r_1 = R_e + h_1 = R_e + \frac{1}{3} R_e = \frac{4}{3} R_e \Rightarrow \frac{r_1}{R_e} = \frac{4}{3}$$



شتاب گرانش در فاصله r از مرکز زمین برابر است با:



$$\begin{cases} g = \frac{GM_e}{r^2} \\ r = R_e + h \end{cases} \xrightarrow{\text{شتاب گرانش در فاصله } h \text{ از سطح زمین}} g = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{با تغییر فاصله از سطح زمین}} \frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2} \right)^2$$

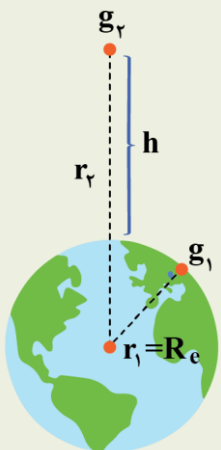
آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۱

۵۵- در کدام فاصله از سطح زمین، شتاب گرانش در مقایسه با سطح زمین، ۹۹ درصد کاهش می‌یابد؟ (R_e شعاع زمین است).

- (۱) $100 R_e$ (۲) $99 R_e$ (۳) $10 R_e$ (۴) $9 R_e$

پاسخ تشریحی:

شتاب گرانش با مجذور فاصله از مرکز زمین نسبت عکس دارد.



$$g \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

$$\frac{g_1 - 0/99 g_1}{g_1} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2$$

$$\frac{1}{100} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 \Rightarrow \frac{R_e}{R_e + h} = \frac{1}{10}$$

$$10 R_e = R_e + h \Rightarrow h = 9 R_e$$

پاسخ: گزینه ۴



۵۰- جرم یک سیاره ۴ برابر جرم زمین و حجم آن ۶۴ برابر حجم زمین است. اگر شتاب گرانش در سطح زمین $9/8 \frac{N}{kg}$ باشد، وزن جسمی به جرم $80 kg$ در سطح این سیاره چند نیوتون است؟ (سیاره‌ها به شکل کره فرض شوند).

- (۱) ۱۹۶ (۲) ۱۹۸ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۰۴

گام اول

با توجه به کرووی بودن سیاره‌ها، طبق رابطه $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ، نسبت شعاع سیاره به شعاع زمین را به دست می‌آوریم:

$$\frac{V_{\text{سیاره}}}{V_{\text{زمین}}} = \left(\frac{R_{\text{سیاره}}}{R_{\text{زمین}}}\right)^3 \Rightarrow 64 = \left(\frac{R_{\text{سیاره}}}{R_{\text{زمین}}}\right)^3 \Rightarrow \frac{R_{\text{سیاره}}}{R_{\text{زمین}}} = 4$$

گام دوم

طبق رابطه $g = \frac{GM}{R^2}$ شتاب گرانشی را در سطح سیاره به دست می‌آوریم:

$$\frac{g_{\text{سیاره}}}{g_{\text{زمین}}} = \frac{M_{\text{سیاره}}}{M_{\text{زمین}}} \times \left(\frac{R_{\text{زمین}}}{R_{\text{سیاره}}}\right)^2 \Rightarrow \frac{g_{\text{سیاره}}}{9/8} = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow g_{\text{سیاره}} = \frac{9/8}{4} N$$

گام آخر

وزن جسم را در سطح سیاره (W') به دست می‌آوریم:

$$W' = mg_{\text{سیاره}} \Rightarrow W' = 80 \times \frac{9/8}{4} = 196 N$$

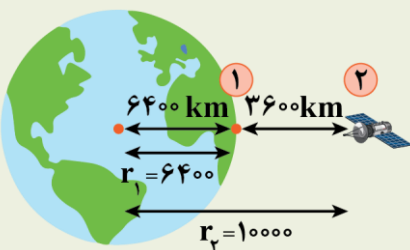
آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۵۰- جرم ماهواره‌ای 250 kg است و فاصله آن از سطح زمین 3600 km است. وزن ماهواره در این ارتفاع چند نیوتون است؟

$$(g = 10 \frac{m}{s^2}, R_e = 6400 \text{ km})$$

(۱) صفر (۲) 2500 (۳) $409/6$ (۴) 1024

پاسخ تشریحی:



$$g = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{g_2}{10} = \left(\frac{6400}{10000}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{g_2}{10} = \left(\frac{16}{25}\right)^2 \Rightarrow g_2 = \frac{16 \times 16 \times 10}{25 \times 25}$$

$$W_2 = mg_2 = 250 \times \frac{16 \times 16 \times 10}{25 \times 25} = 1024 N$$

پاسخ: گزینه ۴



۵۱- جرم زمین 80 برابر جرم ماه و شعاع زمین 4 برابر شعاع ماه است. ماهواره‌ای بر روی خط واصل مراکز دو کره در نقطه‌ای قرار دارد که برآیند نیروهای گرانشی وارد شده بر آن از طرف ماه و زمین صفر شده است. فاصله ماهواره از مرکز کره چند برابر فاصله آن از مرکز کره زمین است؟

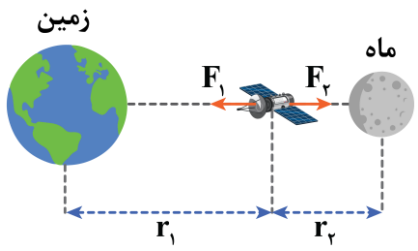
$$\frac{\sqrt{5}}{20} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{10} \quad (۲)$$

$$\sqrt{5} \quad (۱)$$

با توجه به اختلاف جرم کره ما و کره زمین و رابطه نیروی گرانشی، برای این که ماهواره بین ماه و زمین در تعادل باشد، باید بر روی خط واصل مراکز دو کره و نزدیک به کره سبک تر (ماه) قرار گیرد؛ بنابراین مطابق شکل داریم:

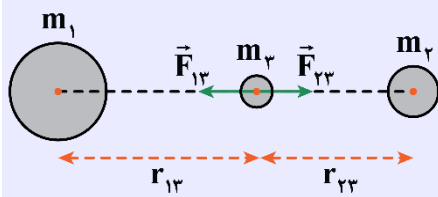


$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow G \frac{m_e m}{r_1^2} = G \frac{m_m m}{r_2^2} \Rightarrow \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{m_m}{m_e} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_m}{m_e}}$$

$$\frac{m_e = 8 \cdot m_m}{r_1} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

برایند نیروهای گرانشی وارد بر یک جسم معین از طرف سایر اجسام (نیروی گرانشی خالص) چگونه محاسبه می شود؟

می دانیم نیروی گرانشی بین اجسام همواره از نوع جاذبه است. برای مثال، در شکل زیر اگر بخواهیم نیروی گرانشی خالص وارد بر جسم m_3 را حساب کنیم، ابتدا نیروهای گرانشی وارد شده بر جسم m_3 از طرف جسم های m_1 و m_2 را به دست می آوریم و در آخر، برایند آن ها را محاسبه می کنیم:



$$F_{13} = G \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2}, F_{23} = G \frac{m_2 m_3}{r_{23}^2}$$

$\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{23}$ در خلاف جهت یکدیگر هستند، پس داریم:

$$F_{\text{net},3} = |F_{13} - F_{23}|$$

در شکل بالا، اگر بخواهیم نیروهای گرانشی وارد شده بر جسم m_3 اثر یکدیگر را خنثی کنند و جسم m_3 در تعادل باشد، باید طبق مراحل زیر پیش برویم:

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \cancel{G} \frac{m_1 \cancel{m_3}}{r_{13}^2} = \cancel{G} \frac{m_2 \cancel{m_3}}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{m_1}{r_{13}^2} = \frac{m_2}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{r_{13}}{r_{23}}\right)^2$$

پس برای تعادل جسم m_3 ، باید جسم m_3 بین دو جسم m_1 و m_2 روی خط واصل آن ها و نزدیک به جسم با جرم کوچک تر قرار گیرد.

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۱- نقطه ای را بین کره ماه و کره زمین تصور کنید که اگر جسمی در آنجا قرار گیرد، نیروی خالصی که از طرف ماه و زمین بر آن جسم وارد می شود، برابر صفر باشد. فاصله آن نقطه تا مرکز زمین چند برابر فاصله نقطه تا مرکز کره ماه است؟ (جرم کره زمین را ۸۱ برابر جرم کره ماه فرض کنید.)

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۸۰ (۴) ۸۱

پاسخ تشریحی:

برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است؛ پس:

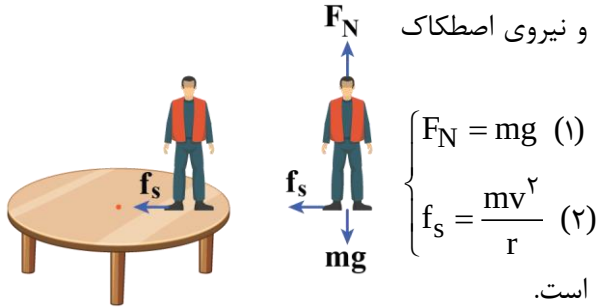
$$\frac{M_E}{r_E^2} = \frac{M_M}{r_M^2} \Rightarrow \frac{81 M_M}{r_E^2} = \frac{M_M}{r_M^2} \Rightarrow \frac{r_E}{r_M} = \sqrt{81} = 9$$

پاسخ: گزینه ۱



۵۲- یک میز افقی دوار حول محور خود به طور یکنواخت در هر ۲ ثانیه یک دور کامل می چرخد. شخصی به جرم ۴۰ kg بر روی میز در یک متری مرکز دوران ایستاده است. نیروی وارده از طرف میز بر شخص چند نیوتون است؟ ($\mu_s = 1/25$, $\pi^2 \approx 10$, $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) $500\sqrt{2}$ (۲) ۴۰۰ (۳) $400\sqrt{2}$ (۴) ۵۰۰



از طرف میز بر شخص دو نیرو وارد می‌شود: نیروی عمودی سطح (به سمت بالا) و نیروی اصطکاک ایستایی (به سمت مرکز دوران).

از طرفی، میز در هر ۲ ثانیه یک دور کامل می‌زند؛ بنابراین دوره چرخش $T = 2s$ است. تندی چرخش شخص برابر است با:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi \left(\frac{m}{s}\right)$$

بنابراین طبق روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} F_N = mg = 40 \times 10 = 400 \text{ N} \\ f_s = \frac{40 \times \pi^2}{1} = 40 \times 10 = 400 \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \text{نیروی میز بر شخص} = \sqrt{400^2 + 400^2} = 400\sqrt{2} \text{ N}$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت

۱- در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت‌زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره تناوب (دوره) نامیده می‌شود.

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

۲- در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اندازه سرعت، ثابت است اما جهت آن دائماً تغییر می‌کند. بنا به همین دلیل این حرکت شتابدار است. جهت شتاب همواره به سمت مرکز دایره است.

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$

$$a_C: \text{شتاب مرکزگرا برحسب } \frac{m}{s^2}$$

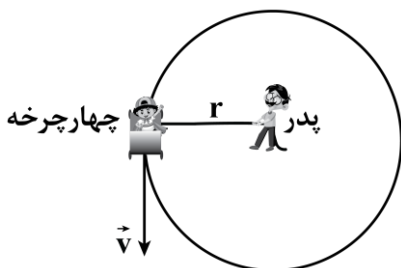
۳- براساس قانون دوم نیوتون ($F = ma$) خواهیم داشت:

$$F_{net} = \frac{mv^2}{r}$$

F_{net} : نیروی خالص برحسب N



۵۳- پدری فرزند ۲۰ کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخه ایمن قرار می‌دهد و با یک طناب ۲ متری، چهارچرخه را روی سطح افقی زمین به گونه‌ای می‌کشد تا چهارچرخه روی دایره‌ای با تندی ثابت $4 \frac{m}{s}$ حرکت کند. اگر نیروی کشش طناب 240 N باشد، جرم چهارچرخه چند کیلوگرم است؟ (اصطکاک ناچیز است).



۱۰ (۱)

۲۰ (۲)

۳۰ (۳)

۵ (۴)

نیروی مرکزگرا همان نیروی کشش نخ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_c = T \Rightarrow T = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow 240 = \frac{m \times 4^2}{2} \Rightarrow m = 30 \text{ kg}$$

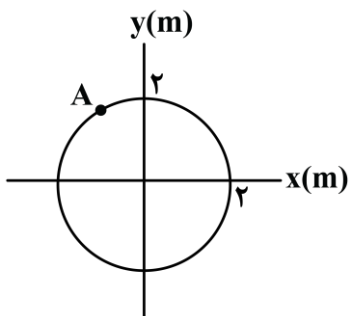
بنابراین جرم مجموعه چهارچرخه و کودک ۳۰ kg است، پس با توجه به این که جرم کودک ۲۰ kg است، چهارچرخه ۱۰ kg جرم دارد.

سوتی‌های پرتکرار

اگر گزینه (۳) رو زدی عجله کردی. جرم چهارچرخه رو از شما می‌خواه و نه مجموع جرم کودک و چهارچرخه.



۵۴- مطابق شکل، متحرکی به جرم ۴ kg حول مبدأ مختصات، با تندی ثابت در مسیر دایره‌ای می‌چرخد. اگر بردار شتاب آن در نقطه A در SI به صورت $\vec{a} = 4/8\vec{j} - 2\vec{i}$ باشد، انرژی جنبشی متحرک چند واحد SI است؟



(۱) ۲۰/۸

(۲) ۲۰/۴

(۳) ۱۰/۸

(۴) ۱۰/۴

گام اول

اندازه شتاب در نقطه A برابر است با:

$$a = \sqrt{2^2 + (4/8)^2} = 5/2 \frac{m}{s^2}$$

گام دوم

مربع تندی حرکت برابر است با:

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow 5/2 = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v^2 = 10/4 \left(\frac{m}{s}\right)^2$$

گام آخر

انرژی جنبشی برابر است با:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10/4 = 20/8 \text{ J}$$



۵۵- ماهواره‌های A و B به جرم‌های $m_A = 200 \text{ kg}$ و $m_B = 400 \text{ kg}$ به ترتیب در فاصله‌های ۱۶۰۰ km و ۱۱۶۰۰ km از سطح زمین، در مسیر دایره‌ای به دور زمین می‌چرخند. در مدتی که ماهواره B، ۱۶ بار دور زمین می‌چرخد، ماهواره A چند دور حول زمین می‌چرخد؟ ($R_e = 6400 \text{ km}$)

(۴) ۵۴

(۳) ۲۷

(۲) ۱۶

(۱) ۳۲

گام اول

شعاع گردش ماهواره‌ها به دور زمین برابر است با:

$$r_A = R_e + h_A = 6400 + 1600 = 8000 \text{ km}$$

$$r_B = R_e + h_B = 6400 + 11600 = 18000 \text{ km}$$

گام دوم

مربع دوره حرکت ماهواره با مکعب شعاع گردش متناسب است؛ بنابراین داریم:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{8000}{18000}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}$$

گام آخر

به کمک رابطه $n = \frac{t}{T}$ داریم:

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow \frac{n_B}{n_A} = \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow \frac{16}{n_A} = \frac{8}{27} \Rightarrow n_A = 54$$

نکات

برای ماهواره‌ای که در فاصله r از مرکز زمین در حال چرخش است:

۱- شتاب مرکزگرا برابر با شتاب گرانشی زمین در محل ماهواره است:

$$a_C = g = G \frac{M_e}{r^2}$$

۲- تندی مداری ماهواره از رابطه $v = \sqrt{G \frac{M_e}{r}}$ به دست می‌آید.

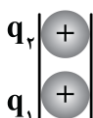
۳- دوره چرخش ماهواره از رابطه $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_e}}$ به دست می‌آید.

۴- اگر فاصله ماهواره از مرکز زمین، از r_1 به r_2 تغییر کند، داریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$



۵۶- در شکل زیر، دو گوی باردار با بارهای $q_1 = 2 \mu\text{C}$ و $q_2 = 2 \mu\text{C}$ که جرم هریک برابر $2/5 \text{ g}$ است، در فاصله مشخصی از هم قرار دارند و گوی بالایی معلق است. اگر گوی بالایی 10^{-3} الکترون بگیرد، فاصله دو گوی در حالت تعادل، چند سانتی‌متر خواهد



شد؟ $(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2})$

۹۰ (۴)

۶۰ (۳)

۳۶ (۲)

۱۸ (۱)

ابتدا محاسبه می‌کنیم که وقتی گوی بالای 10^{13} الکترون بگیرد، بار آن چند میکروکولن خواهد شد:

$$q'_2 = q_2 + \Delta q \xrightarrow{\Delta q = -ne} q'_2 = q_2 - ne$$

$$\xrightarrow{q_2 = 2/1 \mu C, n = 10^{13}, e = 1/6 \times 10^{-19} C = 1/6 \times 10^{-13} \mu C} q'_2 = 2/1 - 10^{13} \times 1/6 \times 10^{-13} = 0/5 \mu C$$

بر گوی بالایی دو نیروی وزن و نیروی دافعه الکتریکی از طرف بار q_1 وارد می‌شود. برای این‌که گوی بالایی در حال تعادل باشد، برآیند این دو نیرو صفر است و داریم:

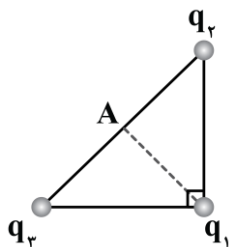
$$F = mg \xrightarrow{F = k \frac{|q_1||q'_2|}{r^2}} k \frac{|q_1||q'_2|}{r^2} = mg$$

$$\xrightarrow{k = 90 \frac{Ncm^2}{\mu C^2}, m = 2/5 \times 10^{-3} kg, q_1 = 2 \mu C, q'_2 = 0/5 \mu C, g = 10 \frac{m}{s^2}} 90 \times \frac{2 \times 0/5}{r^2} = 2/5 \times 10^{-3} \times 10$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{90}{25 \times 10^{-3}} = \frac{9 \times 10^4}{25} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} r = \frac{3}{5} \times 10^2 = 60 \text{ cm}$$



۵۷- مطابق شکل، سه ذره باردار $q_1 = q_3 = -q_2$ ، در سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین قرار دارند. اگر بار q_1 را به نقطه A، وسط خط واصل بارهای q_2 و q_3 منتقل کنیم، بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر آن، چند برابر خواهد شد؟

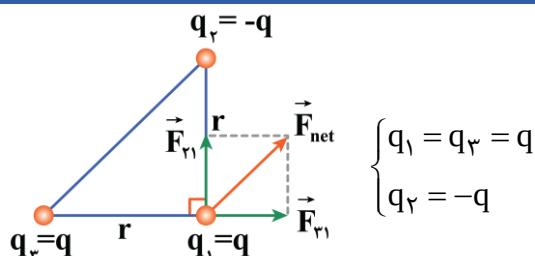


(۱) ۲

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{2}$

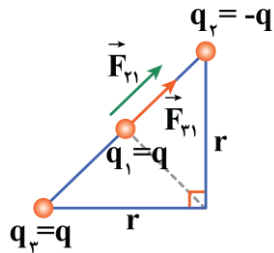


چون اندازه بارهای q_1 ، q_2 و q_3 باهم برابر است، داریم:

از طرفی چون مثلث، قائم الزاویه و متساوی الساقین است، فاصله بارهای q_2 و q_3 از بار q_1 برابر است. در نتیجه نیروی خالص وارد بر بار q_1 با استفاده از قانون کولن به روش زیر به دست می آید:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow F_{r1} = F_{r2} = k \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow F_{net} = \sqrt{F_{r1}^2 + F_{r2}^2} \xrightarrow{F_{r1}=F_{r2}} F_{net} = \sqrt{2} F_{r1}$$

$$\Rightarrow F_{net} = \sqrt{2} \left(k \frac{q^2}{r^2} \right)$$



در این حالت، بار q را به نقطه A ، وسط خط واصل بارهای q_2 و q_3 منتقل می کنیم و فاصله هر بار تا q برابر است با:

$$r_{23} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r \Rightarrow r'_{12} = r'_{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

نیروی خالص وارد بر بار q_1 را محاسبه می کنیم:

$$F'_{r1} = F'_{r2} = k \frac{q^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2} \Rightarrow F'_{r1} = F'_{r2} = 2 \left(k \frac{q^2}{r^2} \right)$$

$$F'_{net} = F'_{r1} + F'_{r2} = 4 \left(k \frac{q^2}{r^2} \right)$$

در نتیجه نسبت دو نیروی F'_{net} و F_{net} برابر است با:

$$\frac{F'_{net}}{F_{net}} = \frac{4 \left(k \frac{q^2}{r^2} \right)}{\sqrt{2} \left(k \frac{q^2}{r^2} \right)} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

محاسبه نیروی الکتریکی در حضور چند بار

در سؤالاتی که چند بار الکتریکی وجود دارند و نیروی الکتریکی وارد بر یکی از آن ها را می خواهیم، گام های زیر را طی می کنیم.

گام اول: بردار نیروی الکتریکی که هر یک از بارها وارد می کنند را رسم می کنیم.

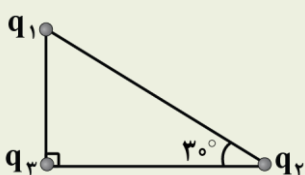
گام دوم: نیروهای الکتریکی را جداگانه محاسبه می کنیم.

گام سوم: بردارهای به دست آمده را به صورت برداری جمع می کنیم. اگر بردارها هم جهت باشند، اندازه آن ها جمع می شود، اگر خلاف جهت هم باشند، اندازه آن ها از هم کم می شود و اگر عمود بر هم باشند با کمک رابطه فیثاغورس برابند آن ها محاسبه می شود.

در ادامه با حل یک مثال، مطالب فوق را مرور می کنیم.

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۳

۶۳- در شکل زیر، بزرگی نیروی الکتریکی که q_1 به q_3 وارد می کند، ۲۵ درصد از بزرگی نیروی الکتریکی که q_2 به q_3 وارد می کند، کمتر است. کدام است؟



$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

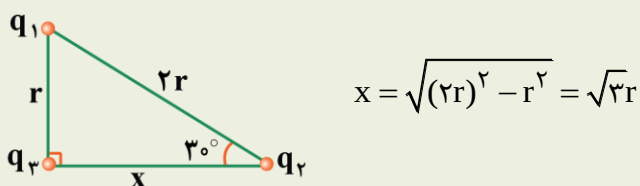
$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

پاسخ تشریحی:

گام اول: ابتدا فاصله بین بارها را مشخص می‌کنیم. فاصله بین q_1 و q_3 را r در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر است؛ بنابراین فاصله بین q_1 و q_3 برابر $2r$ است.



$$x = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$$

گام دوم:

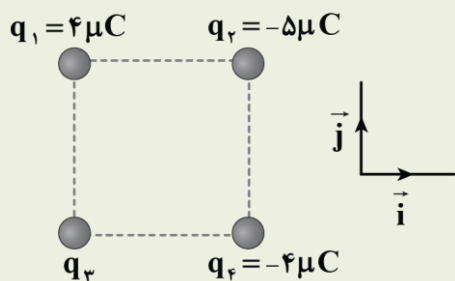
$$F_{13} = 0 / 75 F_{23} \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_3|}{r^2} = \frac{3}{4} \times \frac{k |q_2| |q_3|}{x^2} \Rightarrow \left| \frac{q_1}{q_2} \right| = \frac{1}{4}$$

پاسخ: گزینه ۴

آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۸

۶۲- چهار ذره باردار مطابق شکل زیر در رأس‌های یک مربع به ضلع 20 cm قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_2 در SI به صورت

$$\vec{F} = -9\vec{i} \quad \text{باشد، } q_3 \text{ چند میکروکولن است؟ } (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



$$(1) -8\sqrt{2}$$

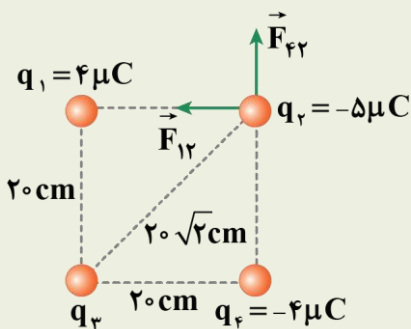
$$(2) -4$$

$$(3) 4$$

$$(4) 8\sqrt{2}$$

پاسخ تشریحی:

دو بار q_1 و q_4 هم‌اندازه‌اند و فاصله آن‌ها از بار q_2 باهم برابر است؛ بنابراین نیروی وارد شده از طرف این دو بار به q_2 باهم برابر است:



$$F_{12} = F_{42} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 5}{20^2} = 4 / 5 \text{ N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} \Rightarrow -9\vec{i} = -4 / 5 \vec{i} + \vec{F}_{32} + 4 / 5 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{32} = -4 / 5 \vec{i} - 4 / 5 \vec{j} \Rightarrow F_{32} = \sqrt{4 / 5^2 + 4 / 5^2} = 4 / 5 \sqrt{2} \text{ N}$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times |q_3| \times 5}{(20\sqrt{2})^2} = 4 / 5 \sqrt{2} \Rightarrow |q_3| = 8\sqrt{2} \mu\text{C}$$

از طرفی، با توجه به مؤلفه‌های نیروی $\vec{F}_{32}$ درمی‌یابیم که بار q_3 ، بار q_2 را جذب می‌کند؛ بنابراین q_3 و q_2 ناهمنام‌اند.

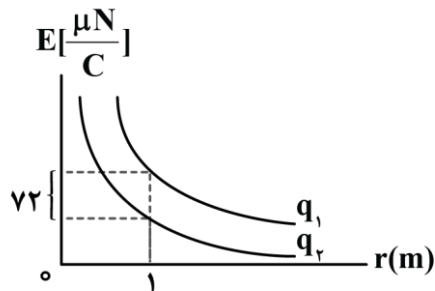
$$q_2 < 0 \Rightarrow q_3 > 0 \Rightarrow q_3 = 8\sqrt{2} \mu\text{C}$$

پاسخ: گزینه ۴

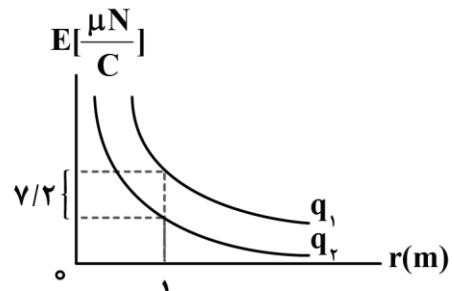


۵۸- دو بار الکتریکی $q_1 < 0$ و $q_2 < 0$ در اختیار داریم. اگر بار q_1 به تعداد ۵۰۰۰ الکترون بیش‌تر از بار q_2 داشته باشد، کدام نمودار

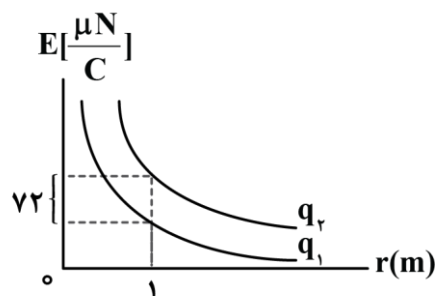
میدان الکتریکی بر حسب فاصله برای این دو بار به‌درستی رسم شده است؟ $(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



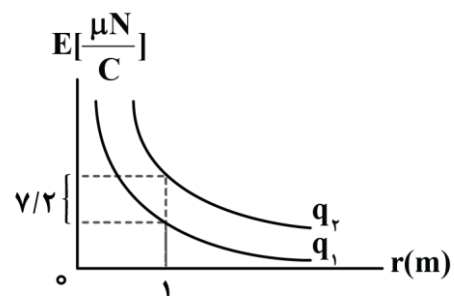
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

(سخت - نموداری - استاندارد) - صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

ابتدا اختلاف بار q_1 و q_2 را به‌دست می‌آوریم. چون هر دو بار منفی هستند اما تعداد الکترون‌های بار q_1 بیش‌تر است، در نتیجه $|q_1| > |q_2|$ می‌باشد.

$$|q_1| - |q_2| = ne = 5000 \times 1/6 \times 10^{-19} = 8 \times 10^{-16} \text{ C}$$

گام آخر

در نمودارها، اختلاف میدان حاصل از بارها در فاصله یک‌متری خواسته شده است.

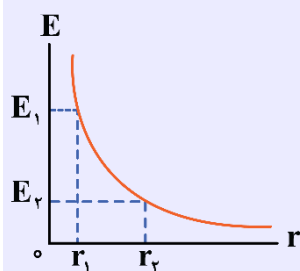
$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow \Delta E = \frac{k|\Delta q|}{r^2}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-16}}{(1)^2} = 72 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{C}} = 7/2 \frac{\mu\text{N}}{\text{C}}$$

دقت شود چون $|q_1| > |q_2|$ است، در نتیجه به‌ازای فاصله‌های یکسان، میدان حاصل از بار q_1 باید بزرگ‌تر باشد. پس نمودار آن باید بالاتر قرار گیرد.

نمودار بزرگی میدان الکتریکی بر حسب فاصله از بار

نمودار تغییرات بزرگی میدان الکتریکی بر حسب فاصله از بار، مطابق شکل مقابل است: همان‌طور که واضح است با افزایش فاصله از بار، بزرگی میدان کاهش می‌یابد.



$$E = \frac{k|q|}{r^2} \xrightarrow{k|q| \text{ ثابت است}} E \propto \frac{1}{r^2}$$

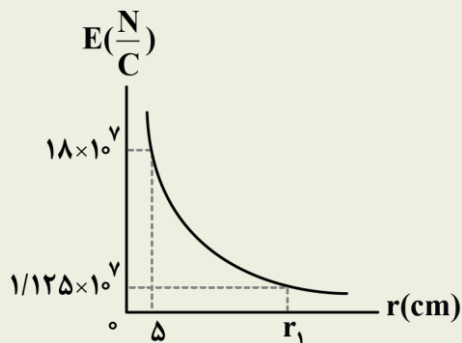


اگر بزرگی میدان الکتریکی بار q در فاصله r_1 برابر با E_1 و در فاصله r_2 برابر با E_2 باشد، داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۹- نمودار تغییرات میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q برحسب فاصله از آن به صورت شکل زیر است. اندازه q چند میکروکولن و r_1



چند سانتی‌متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

(۱) ۱۰، ۵۰

(۲) ۲۰، ۵۰

(۳) ۱۰، ۲۵

(۴) ۲۰، ۲۵

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار داده شده داریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{18 \times 10^7}{1/125 \times 10^7} = \left(\frac{r_1}{5}\right)^2 \Rightarrow r_1 = 20 \text{ cm}$$

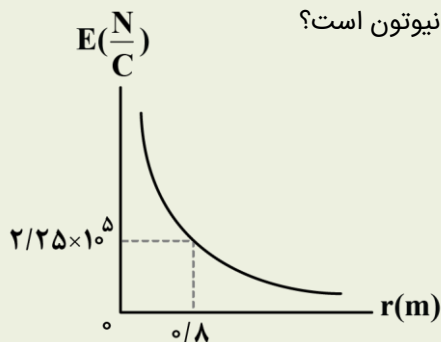
و بار الکتریکی برابر است با:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow 18 \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 \times |q|}{(5 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow |q| = 50 \times 10^{-6} \text{ C} = 50 \mu\text{C}$$

پاسخ: گزینه ۲

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۱- نمودار تغییرات میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q برحسب فاصله از آن به صورت شکل زیر است. اگر بار الکتریکی $q' = 9 \mu\text{C}$ را در فاصله ۹۰ سانتی‌متری بار q قرار دهیم، نیرویی که دو ذره باردار بر یکدیگر وارد می‌کنند، چند نیوتون است؟



(۱) ۰/۱۶

(۲) ۰/۳۲

(۳) ۱/۶

(۴) ۳/۲

پاسخ تشریحی:

گام اول: ابتدا به کمک نمودار، اندازه بار الکتریکی q را محاسبه می‌کنیم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow 2/25 \times 10^5 = \frac{9 \times 10^9 \times |q|}{0.8^2} \Rightarrow |q| = 16 \times 10^{-6} \text{ C} = 16 \mu\text{C}$$

گام دوم: حال از قانون کولن برای محاسبه نیروی بین $|q|$ و $|q'|$ استفاده می‌کنیم:

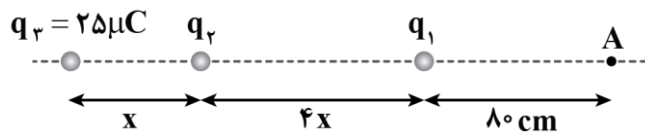
$$F = 90 \times \frac{|q||q'|}{r^2} = 90 \times \frac{16 \times 9}{90^2} = 1/6 \text{ N}$$

پاسخ: گزینه ۳



۵۹- مطابق شکل، سه بار الکتریکی q_1 ، q_2 و q_3 در تعادل الکتروستاتیکی قرار دارند. اگر اندازه میدان الکتریکی ناشی از بار q_2

در محل A برابر با $\frac{36000}{C} \frac{N}{C^2}$ باشد، فاصله A تا بار q_3 چند سانتی متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



(۱) ۲۱۰

(۲) ۲۳۰

(۳) ۲۴۰

(۴) ۲۷۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۵ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

کلم اول

ابتدا با توجه به تعادل سه بار الکتریکی، q_2 را به دست می آوریم:

$$q_1 \Rightarrow F_{q_1} = F_{q_2} \Rightarrow \left| \frac{q_1}{q_2} \right| = \left(\frac{r_{q_1}}{r_{q_2}} \right)^2 \Rightarrow \frac{25}{|q_2|} = \left(\frac{5x}{4x} \right)^2 \Rightarrow |q_2| = 16 \mu C$$

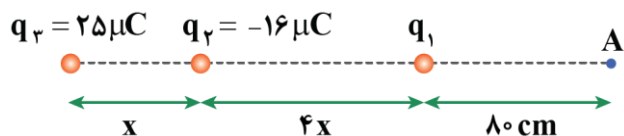
برای این که ۳ بار الکتریکی نشان داده شده در تعادل باشند، باید بارهای q_1 و q_3 مثبت باشند و q_2 منفی باشد:

$$q_2 = -16 \mu C$$

کلم دوم

فاصله x را به کمک بزرگی میدان q_2 در نقطه A حساب می کنیم:

$$q_2 = -16 \mu C$$



$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow 36000 = \frac{9 \times 10^9 \times 16 \times 10^{-6}}{r_2^2}$$

$$\Rightarrow r_2 = 2 m = 200 cm$$

با توجه به شکل، $r_2 = 4x + 80$ است:

$$200 = 4x + 80 \Rightarrow x = 30 cm$$

کلم آخر

در نتیجه فاصله q_3 تا نقطه A برابر است با:

$$r_3 = x + 4x + 80 = 5x + 80 = 5(30) + 80 = 230 cm$$

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار

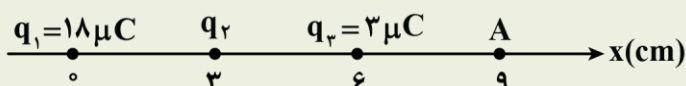
برای محاسبه اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$E_A = k \frac{|q|}{r^2}$$

نیوتون بر کولن $(\frac{N}{C})$

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۶۰- مطابق شکل، سه ذره باردار روی محور x ثابت شده اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه A برابر $3 \times 10^7 \frac{N}{C}$ است. بار q_2 چند



$$(k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2})$$

(۴) -۳۲

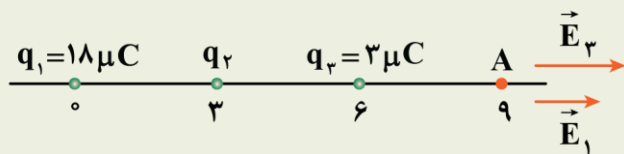
(۳) -۱۶

(۲) ۸

(۱) ۴

پاسخ تشریحی:

در نقطه A سه میدان الکتریکی وجود دارد. ابتدا میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_3 را در نقطه A به دست می‌آوریم:



$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 18 \times 10^{-6}}{(9 \times 10^{-2})^2} = 2 \times 10^7 \frac{N}{C} \Rightarrow \vec{E}_1 = 2 \times 10^7 \vec{i} \left(\frac{N}{C} \right)$$

$$E_3 = \frac{k|q_3|}{r_3^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} = 3 \times 10^7 \frac{N}{C} \Rightarrow \vec{E}_3 = 3 \times 10^7 \vec{i} \left(\frac{N}{C} \right)$$

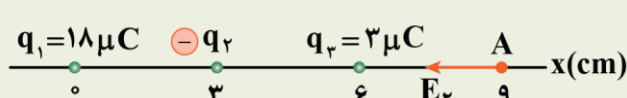
$$\vec{E}_3 \text{ و } \vec{E}_1 \text{ برایند میدان‌های } \vec{E}_{1,3} = 2 \times 10^7 \vec{i} + 3 \times 10^7 \vec{i} = 5 \times 10^7 \vec{i} \left(\frac{N}{C} \right)$$

در صورت سؤال فقط بزرگی میدان خالص را به ما داده است، پس میدان خالص می‌تواند در جهت محور x یا خلاف جهت آن باشد:

$$\text{حالت اول: } \vec{E}_t = +3 \times 10^7 \vec{i} \left(\frac{N}{C} \right) \quad \text{حالت دوم: } \vec{E}_t = -3 \times 10^7 \vec{i} \left(\frac{N}{C} \right)$$

$$\text{حالت اول: } \vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\Rightarrow +3 \times 10^7 \vec{i} = 2 \times 10^7 \vec{i} + \vec{E}_2 + 3 \times 10^7 \vec{i} \Rightarrow \vec{E}_2 = -2 \times 10^7 \vec{i} \left(\frac{N}{C} \right)$$



چون میدان $\vec{E}_2$ در نقطه A به سمت چپ است، پس q_2 منفی است.

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow 2 \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_2|}{36 \times 10^{-4}} \Rightarrow |q_2| = 8 \times 10^{-6} C \Rightarrow q_2 = -8 \mu C$$

چون پاسخ در گزینه‌ها وجود ندارد حالت دوم را بررسی می‌کنیم:

$$\text{حالت دوم: } \vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$-3 \times 10^7 \vec{i} = 2 \times 10^7 \vec{i} + \vec{E}_2 + 3 \times 10^7 \vec{i} \Rightarrow \vec{E}_2 = -8 \times 10^7 \vec{i} \left(\frac{N}{C} \right)$$

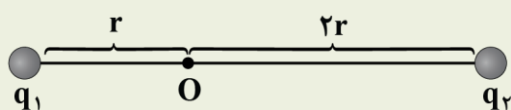
چون میدان $\vec{E}_2$ در نقطه A به سمت چپ است، پس q_2 منفی است.

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow 8 \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 |q_2|}{36 \times 10^{-4}} \Rightarrow |q_2| = 32 \times 10^{-6} C \Rightarrow q_2 = -32 \mu C$$

پاسخ: گزینه ۴

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶۰- مطابق شکل زیر، دو ذره باردار $q_1 = -2Q$ و $q_2 = 6Q$ در فاصله $2r$ از هم قرار دارند و بزرگی میدان الکتریکی خالص (برایند) ناشی از دو ذره در نقطه O برابر E_1 است. اگر ۵۰ درصد از بار q_2 به q_1 منتقل شود، بزرگی میدان الکتریکی خالص (برایند) در نقطه O برابر E_2 می‌شود. کدام است $\frac{E_2}{E_1}$ ؟



$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

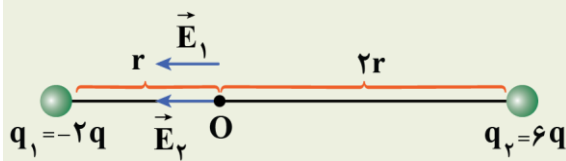
$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{14} \quad (۱)$$

پاسخ تشریحی:

این سؤال دو حالت دارد؛ در حالت اول میدان هر دو بار در نقطه O هم جهت است:

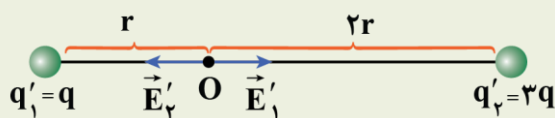


$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{k|-2q|}{r^2} = \frac{2k|q|}{r^2} \\ E_2 &= \frac{k|6q|}{(2r)^2} = \frac{3k|q|}{2r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_{\text{کل}} = E_1 + E_2 = \frac{7k|q|}{2r^2}$$

در حالت دوم، ۵۰٪ بار q_2 به q_1 منتقل می‌شود:

$$\begin{cases} q'_1 = -2q + \frac{1}{2}(6q) = q \\ q'_2 = 6q - \frac{1}{2}(6q) = 3q \end{cases}$$

و میدان‌ها در نقطه O خلاف جهت هم هستند:



$$\left. \begin{aligned} E'_1 &= \frac{k|q|}{r^2} \\ E'_2 &= \frac{k|3q|}{(2r)^2} = \frac{3k|q|}{4r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E'_{\text{کل}} = E'_1 - E'_2 = \frac{k|q|}{4r^2}$$

و در نهایت:

$$\frac{E'_{\text{کل}}}{E_{\text{کل}}} = \frac{\frac{k|q|}{4r^2}}{\frac{7k|q|}{2r^2}} = \frac{1}{14}$$

پاسخ: گزینه ۱



۶۰- در شکل زیر دو بار در فاصله معینی از هم ثابت شده‌اند و یکی از خط‌های میدان الکتریکی که در اطراف بارها وجود دارد، رسم شده است. علامت و مقایسه اندازه بارها در کدام گزینه به درستی آمده است؟



۱) $|q_1| > |q_2|$, $q_2 > 0$, $q_1 < 0$

۲) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 > 0$, $q_1 < 0$

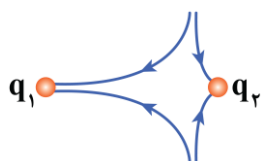
۳) $|q_1| > |q_2|$, $q_2 < 0$, $q_1 < 0$

۴) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 < 0$, $q_1 < 0$

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

اگر خطوط میدان اطراف بارها را کامل تر کنیم، خواهیم داشت:



با توجه به شکل چون خطوط میدان به هر دو بار وارد می‌شوند، پس هر دو بار منفی‌اند. از طرفی هرچه خطوط

میدان اطراف بارها افقی‌تر باشند نشانگر تراکم بیش‌تر خطوط میدان است، پس: $|q_1| > |q_2|$

خطوط میدان الکتریکی

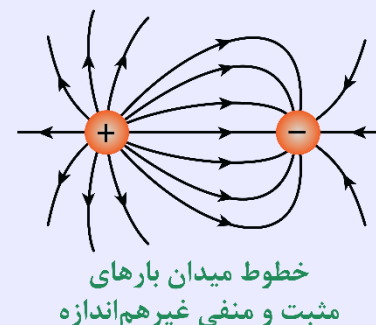
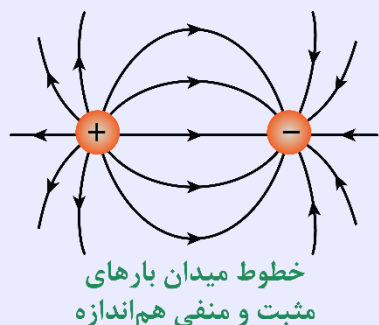
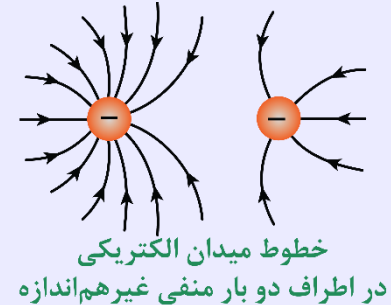
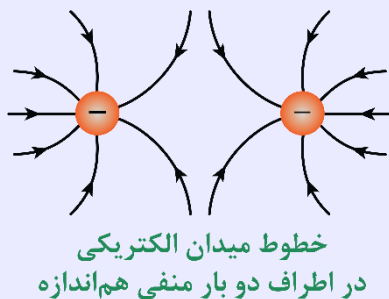
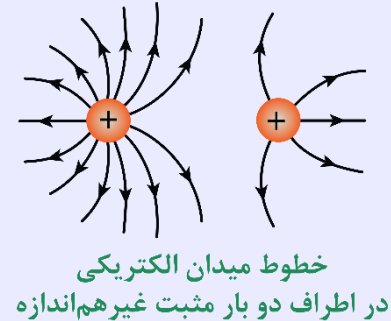
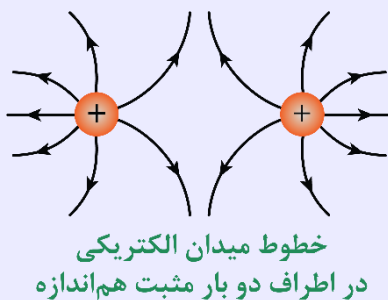
۱- برای مجسم کردن میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار از خطوط میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم. این خطوط ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشند:

الف) از بار مثبت خارج می‌شوند و به بار منفی وارد می‌شوند.

- ب) بردار میدان الکتریکی در هر نقطه هم‌جهت با خط مماس بر خطوط میدان الکتریکی در آن نقطه است.
- پ) هرچه تراکم خطوط میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا بیش‌تر باشد، اندازه میدان الکتریکی در آن ناحیه بیش‌تر است.
- ت) خطوط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از هر نقطه فقط یک خط میدان عبور می‌کند.
- ۲- خطوط میدان الکتریکی در اطراف یک ذره باردار منزوی مطابق شکل‌های زیر است:

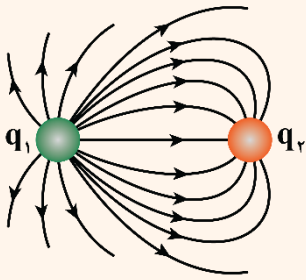


- ۳- خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو ذره باردار مطابق شکل‌های زیر است:



یه نمونه باحال

در شکل زیر، خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو ذره باردار نشان داده شده است. کدام یک از نتیجه‌گیری‌ها صحیح است؟
الف: علامت بار q_2 منفی است.
ب: علامت بارها یکسان است.
پ: اندازه بار q_1 بزرگ‌تر از اندازه q_2 است.
ت: تراکم خطوط میدان الکتریکی در نزدیکی q_2 ، بیش‌تر از تراکم این خطوط در نزدیکی q_1 است.



۱) «الف» و «ت» ۲) «الف» و «پ» ۳) «ب» و «پ» ۴) «ب» و «ت»

پاسخ تشریحی:

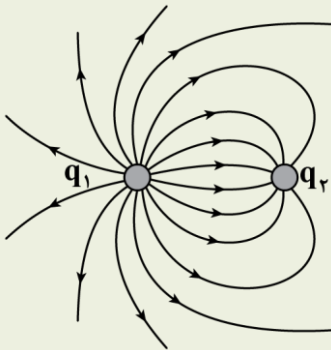
برای پاسخ‌دادن به این سؤال به نکات زیر توجه کنید:

- ۱- خطوط میدان از q_1 خارج شده‌اند و به q_2 وارد می‌شوند؛ بنابراین q_1 مثبت و q_2 منفی است.
- ۲- تراکم خطوط در نزدیکی q_1 بیش‌تر از q_2 است؛ بنابراین اندازه q_1 بزرگ‌تر از اندازه q_2 است.

پاسخ: گزینه ۲

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۴۲- در شکل زیر، با توجه به خطوط میدان الکتریکی، کدام رابطه‌ها در مورد بارهای الکتریکی درست است؟



۱) $|q_2| < |q_1|$, $q_1 < 0$

۲) $|q_1| < |q_2|$, $q_1 < 0$

۳) $|q_2| < |q_1|$, $q_2 < 0$

۴) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 < 0$

پاسخ تشریحی:

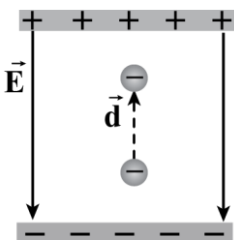
جهت خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت به سمت بار منفی است. در نتیجه با توجه به شکل خطوط میدان، بار q_1 مثبت ($q_1 > 0$) و بار q_2 منفی ($q_2 < 0$) است. همچنین تراکم خطوط میدان در اطراف بار q_1 بیش‌تر است، در نتیجه اندازه بار q_1 از اندازه بار q_2 بزرگ‌تر است. ($|q_2| < |q_1|$)

پاسخ: گزینه ۳

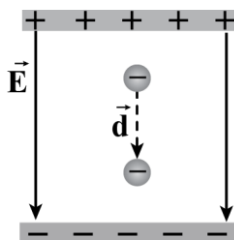


۶۱- در کدام یک از شکل‌های زیر، کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره مثبت است و انرژی پتانسیل الکتریکی ذره کاهش یافته است؟

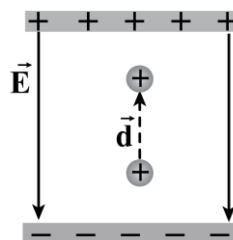
($\vec{E}$: بردار میدان الکتریکی میان دو صفحه و $\vec{d}$: بردار جابه‌جایی ذره)



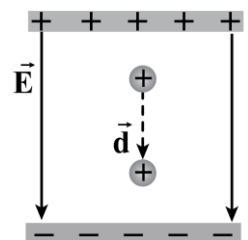
«الف»



«ب»



«ج»



«د»

۴) فقط «ب»

۳) «ب» و «ج»

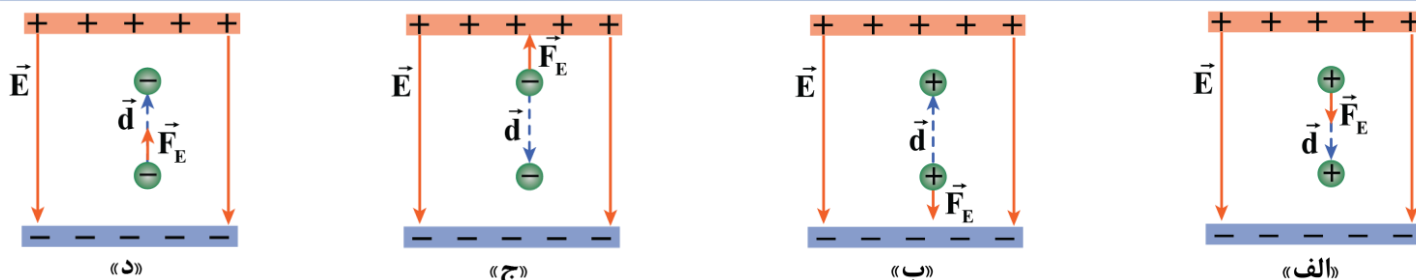
۲) فقط «الف»

۱) «الف» و «د»

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

در شکل‌های «الف» و «د»، نیروی الکتریکی هم‌جهت جابه‌جایی ذره است؛ بنابراین کار نیروی الکتریکی مثبت است. با توجه به رابطه $\Delta U = -W_E$ ، مثبت شدن کار به معنی کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی است.



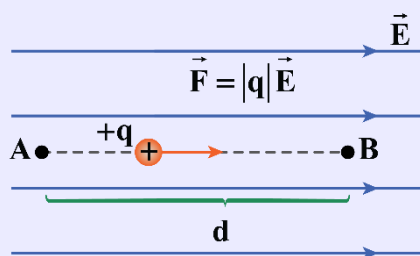
کار نیروی الکتریکی

کار نیروی الکتریکی وارد بر یک ذره باردار در میدان الکتریکی $\vec{E}$ در یک جابه‌جایی مشخص، برابر با قرینه تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی در همان جابه‌جایی است.

$$W_E = -\Delta U_E$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره باردار در میدان الکتریکی یکنواخت

فرض کنید ذره باردار $+q$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ تحت اثر میدان الکتریکی، جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد. طبق تعریف کار یک نیرو، خواهیم داشت:



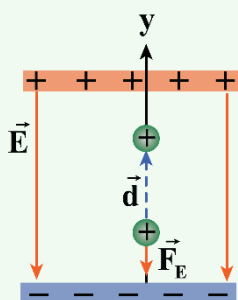
$$W_E = F_E d \cos \theta = |q| E d \cos \theta$$

$$\Delta U_E = -W_E = -|q| E d \cos \theta$$

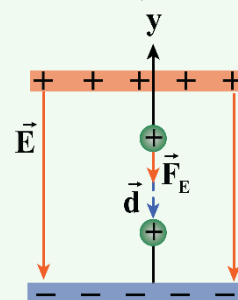
θ زاویه بین نیروی الکتریکی $\vec{F}_E$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ است.

نکات طلایی

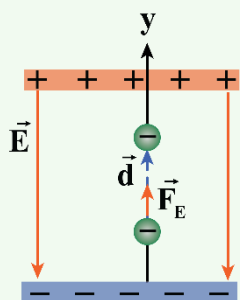
- ۱- به‌سادگی می‌توان دریافت، اگر بار الکتریکی مثبت، در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش یافته است و اگر بار الکتریکی منفی، در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.
 - ۲- اگر یک بار الکتریکی را در یک میدان الکتریکی رها سازیم، همواره به سمتی می‌رود که انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد و اگر برای جابه‌جایی آن مجبور باشیم به‌زور این کار را انجام دهیم، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.
- در شکل‌های زیر، چند حالت مربوط به جابه‌جایی بارهای مختلف و تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی نشان داده شده است.



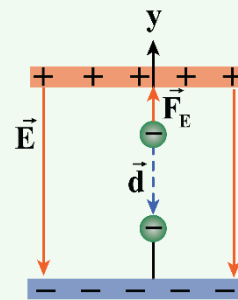
(الف) بار مثبت در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.



(ب) بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



(ت) بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



(پ) بار منفی در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴۹- ذره‌ای با بار الکتریکی $q < 0$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت از نقطه A تا B در راستای میدان جابه‌جا می‌شود. کدام مورد الزاماً درست است؟



- (۱) کار نیروی میدان الکتریکی روی ذره منفی است.
- (۲) کار نیروی میدان الکتریکی روی ذره مثبت است.
- (۳) انرژی جنبشی ذره کاهش می‌یابد.
- (۴) انرژی جنبشی ذره افزایش می‌یابد.

پاسخ تشریحی:

با توجه به این‌که ذره باردار در جابه‌جایی از نقطه A تا نقطه B در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت کرده است؛ بنابراین پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد ($\Delta V > 0$). از طرفی چون ذره دارای بار منفی است؛ بنابراین ΔU_E و ΔV مختلف‌العلامت هستند (یعنی $\Delta U_E < 0$ است). در نتیجه می‌توان نوشت:

$$W_E = -\Delta U_E \xrightarrow{\Delta U_E < 0} W_E > 0$$

بنابراین کار میدان بر روی ذره در این جابه‌جایی الزاماً مثبت است.

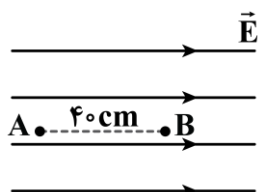
در این سؤال از نیروهای غیر از نیروی الکتریکی صحبتی نشده است؛ بنابراین نمی‌توان با قطعیت گفت کار کل همان کار میدان الکتریکی است و در نتیجه اظهار نظر قطعی در مورد گزینه‌های (۳) و (۴) ممکن نیست.

$$\xrightarrow{\text{قضیه کار-انرژی جنبشی}} W_t = \Delta K \rightarrow W_E + \underbrace{W_{\text{خارجی}}}_{\text{کارهای غیر از میدان الکتریکی}} = \Delta K$$

پاسخ: گزینه ۲



۶۲- مطابق شکل زیر، اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B داخل یک میدان الکتریکی یکنواخت، برابر $80V$ است. اگر ذره‌ای با بار الکتریکی $q = 20 \mu C$ از نقطه A رها شود، انرژی جنبشی آن پس از $5cm$ جابه‌جایی در امتداد خط‌های میدان الکتریکی، چند میکروژول خواهد شد؟ (از اثر نیروی وزن و نیروهای اتلاف‌کننده انرژی صرف نظر کنید.)



- (۱) ۱۰۰
- (۲) ۲۰۰
- (۳) ۳۰۰
- (۴) ۱۶۰۰

گام اول

با توجه به این که میدان الکتریکی یکنواخت است، با استفاده از رابطه $E = \frac{\Delta V}{d}$ ، تغییر پتانسیل الکتریکی را در جابه‌جایی 5 cm محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل کاهش می‌یابد و داریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \xrightarrow{E \text{ ثابت است.}} \frac{V_B - V_A}{d} = \frac{\Delta V'}{d'} \quad \begin{matrix} V_B - V_A = -80\text{ V} \\ d = 40\text{ cm}, d' = 5\text{ cm} \end{matrix}$$

$$\frac{-80}{40} = \frac{\Delta V'}{5} \Rightarrow \Delta V' = -10\text{ V}$$

گام دوم

بنابراین تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q در این جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta U = q\Delta V' \xrightarrow{q = 20 \times 10^{-6}\text{ C}, \Delta V' = -10\text{ V}} \Delta U = 20 \times 10^{-6} \times (-10) = -2 \times 10^{-4}\text{ J}$$

گام آخر

با توجه به این که نیروهای اتلافی نداریم، انرژی مکانیکی پایسته است و داریم:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow K_f - \cancel{K_i} - 2 \times 10^{-4} = 0 \Rightarrow K_f = 2 \times 10^{-4}\text{ J} = 200\text{ }\mu\text{J}$$

نکته

اگر به ذره‌ای فقط نیروی الکتریکی وارد شود، داریم:

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

$$\Delta U_E = -\Delta K$$

تغییر انرژی جنبشی

رابطه تغییر پتانسیل الکتریکی با تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت زیر است:

تغییر پتانسیل الکتریکی (V)

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

بار الکتریکی (C)

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰

۶۴- در یک میدان الکتریکی یکنواخت، ذره باردار را در نقطه‌ای به پتانسیل الکتریکی $V_1 = 30\text{ V}$ از حال سکون رها می‌کنیم. اگر ذره فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی به نقطه‌ای به پتانسیل الکتریکی $V_2 = 80\text{ V}$ برسد و انرژی جنبشی آن 2 mJ افزایش یابد، بار الکتریکی ذره چند میکروکولن است؟

(۱) ۸۰ (۲) ۴۰ (۳) -۴۰ (۴) -۸۰

پاسخ تشریحی:

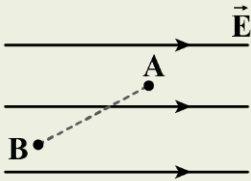
انرژی جنبشی 2 mJ زیاد شده است، پس انرژی پتانسیل الکتریکی 2 mJ کم شده است (چرا؟)؛ بنابراین $\Delta U = -2\text{ mJ}$ است و می‌توان نوشت:

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow -2 \times 10^{-3} = q(80 - 30)$$

$$\Rightarrow q = -4 \times 10^{-5}\text{ C} = -40\text{ }\mu\text{C}$$

پاسخ: گزینه ۳

۶۱- در شکل زیر، بار الکتریکی $q = -50 \mu C$ از نقطه A به پتانسیل الکتریکی 120 ولت به نقطه B می‌رود و انرژی پتانسیل الکتریکی آن $5 mJ$ تغییر می‌کند. پتانسیل الکتریکی نقطه B چند ولت است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۱۱۰

(۳) ۱۳۰

(۴) ۲۲۰

پاسخ تشریحی:

بار منفی، خلاف جهت میدان حرکت کرده است؛ بنابراین:

$$\Delta U < 0 \Rightarrow \Delta U = -5 mJ$$

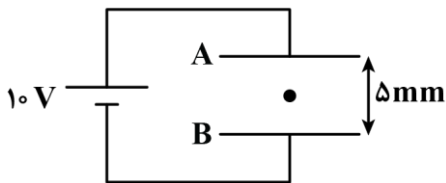
بنابراین:

$$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - 120 = \frac{-5 \times 10^{-3}}{-50 \times 10^{-6}} \Rightarrow V_B = 220 V$$

پاسخ: گزینه ۴



۶۳- ذره‌ای به جرم $4mg$ در میدان الکتریکی بین دو صفحه رسانای A و B مطابق شکل، معلق و به حال سکون قرار دارد. تعداد الکترون‌هایی که این ذره در اثر مالش است، برابر است. $(e = 1.6 \times 10^{-19} C, g = 10 \frac{N}{kg})$



(۱) از دست داده - $1/25 \times 10^9$

(۲) گرفته - $1/25 \times 10^9$

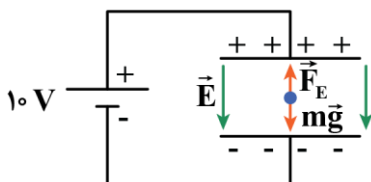
(۳) از دست داده - $1/25 \times 10^{11}$

(۴) گرفته - $1/25 \times 10^{11}$

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

گام اول



چون ذره معلق و به حال سکون است، نیروی خالص وارد بر آن صفر است. بر ذره دو نیروی وزن و نیروی الکتریکی وارد می‌شود. با توجه به جهت نیروی وزن، جهت نیروی الکتریکی به سمت بالا است؛ بنابراین بار ذره منفی است و در اثر مالش الکترون گرفته است.

گام دوم

به کمک تساوی $F_E = mg$ بار ذره را محاسبه می‌کنیم:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_E = mg \Rightarrow \frac{F_E = E|q|}{E = \frac{|\Delta V|}{d}} \Rightarrow \frac{|\Delta V|}{d} \times |q| = mg \Rightarrow \frac{10}{5 \times 10^{-3}} \times |q| = 4 \times 10^{-6} \times 10 \Rightarrow |q| = 20 \times 10^{-9} C$$

تعداد الکترون‌هایی که ذره در اثر مالش گرفته را از رابطه $n = \frac{|q|}{e}$ به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{|q|}{e} = \frac{20 \times 10^{-9}}{1/6 \times 10^{-19}} = 12/5 \times 10^{10} = 2.4 \times 10^{11}$$

تعادل بین نیروی الکتریکی و وزن

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

m

$$\vec{W} = m\vec{g}$$

در این قسمت می‌خواهیم تعادل جسم بارداری را که تحت تأثیر نیروی الکتریکی و نیروی وزن قرار دارد بررسی کنیم. شکل روبه‌رو نیروهای وارد بر جسم را نشان می‌دهد:

با توجه به این که جسم در تعادل قرار دارد، نیروی وزن و نیروی الکتریکی، هم‌اندازه هستند و می‌توان نوشت:

$$F_E = W \Rightarrow |qE| = mg$$

شرط تعادل

در مورد جهت میدان و علامت بار به موارد زیر دقت کنید:

- ۱- اگر بار مثبت باشد ($q > 0$)، نیروی الکتریکی هم‌جهت با میدان الکتریکی است؛ بنابراین میدان الکتریکی به سمت بالا خواهد بود.
- ۲- اگر بار منفی باشد ($q < 0$)، نیروی الکتریکی و میدان در خلاف جهت هم هستند؛ بنابراین میدان الکتریکی به سمت پایین خواهد بود.

یه نمونه باحال

یک ذرهٔ باردار به جرم ۲g دارای بار الکتریکی $q = -5\mu C$ است. این ذره را از ارتفاعی رها می‌کنیم. برای آن که این ذره معلق بماند و سقوط نکند، باید میدان الکتریکی در جهت و با بزرگی واحد SI در اطراف ذره ایجاد کنیم. ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

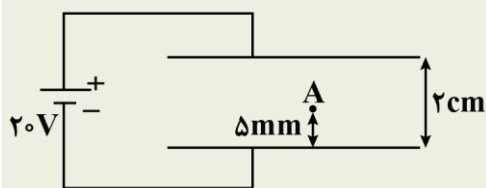
پاسخ تشریحی:

ابتدا دقت کنید که چون بار ذره منفی است، میدان به سمت پایین خواهد بود. برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان می‌توان نوشت:

$$mg = |qE| \Rightarrow 2 \times 10^{-3} \times 10 = 5 \times 10^{-6} \times E \Rightarrow E = 4000 \frac{N}{C}$$

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۶۱- دو صفحهٔ رسانای موازی را به باتری وصل می‌کنیم. اگر بار $q = -5mC$ را در نقطهٔ A رها کنیم، وقتی به صفحهٔ بالایی می‌رسد انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میلی‌ژول و چگونه تغییر می‌کند؟ (از اثر وزن ذره صرف‌نظر کنید).



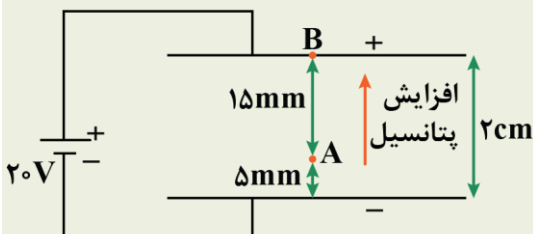
(۱) ۱۰۰ و کاهش

(۲) ۱۰۰ و افزایش

(۳) ۷۵ و کاهش

(۴) ۷۵ و افزایش

پاسخ تشریحی:



$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|\Delta V_{AB}|}{d_{AB}} \Rightarrow \frac{20V}{20mm} = \frac{|\Delta V_{AB}|}{15mm} \Rightarrow |\Delta V_{AB}| = 15V$$

چون پتانسیل صفحهٔ B از صفحهٔ A بیش‌تر است، پس:

$$V_B - V_A = +15V$$

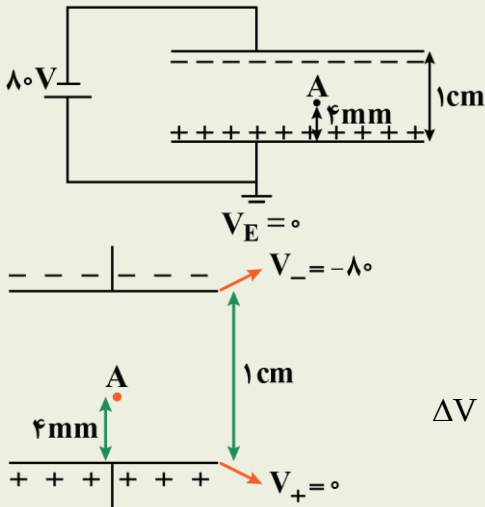
$$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow +15 = \frac{\Delta U}{-5mC} \Rightarrow \Delta U = -75mJ$$

پس انرژی پتانسیل الکتریکی بار ۷۵mJ کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۳

آزمون سراسری تجربی ۱۳۹۹

۶۱- دو صفحه رسانای موازی با ابعاد بزرگ را مطابق شکل زیر به یک باتری وصل کرده‌ایم، پتانسیل نقطه A چند ولت است؟



(۱) -۴۸

(۲) -۳۲

(۳) +۳۲

(۴) +۴۸

پاسخ تشریحی:

با توجه به نکته فوق و با توجه به این نکته که صفحه مثبت به زمین متصل است:

$$\Delta V \sim d \Rightarrow \frac{-80}{1 \times 10^{-2}} = \frac{V_A}{4 \times 10^{-3}} \Rightarrow V_A = -32 V$$

پاسخ: گزینه ۲

۶۴- الکترونی از ارتفاع h در یک میدان الکتریکی یکنواخت قائم رو به بالا رها می‌شود. اگر فقط جهت میدان الکتریکی عوض شود و

یک پروتون از همان ارتفاع رها شود، نسبت زمان سقوط الکترون به زمان سقوط پروتون

(۱) بزرگ‌تر از $\sqrt{2}$ است. (۲) بزرگ‌تر از ۱ است. (۳) برابر با ۱ است. (۴) کوچک‌تر از ۱ است.

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

کام اول

دو نیروی الکتریکی و گرانشی به سمت پایین بر الکترون وارد می‌شوند. طبق قانون دوم نیوتون، داریم: (m_e جرم الکترون است).

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow m_e g + eE = m_e a_e \Rightarrow a_e = g + \frac{eE}{m_e}$$

کام دوم

برای پروتون، جهت میدان الکتریکی رو به پایین است، پس داریم: (m_p جرم پروتون است).

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow m_p g + eE = m_p a_p \Rightarrow a_p = g + \frac{eE}{m_p}$$

کام سوم

چون ذرات رها می‌شوند، با کمک رابطه مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta y = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0=0} h = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

کام آخر

ارتفاع سقوط هر دو برابر است، پس داریم:

$$\frac{t_e}{t_p} = \sqrt{\frac{a_p}{a_e}} = \sqrt{\frac{g + \frac{eE}{m_p}}{g + \frac{eE}{m_e}}} \xrightarrow{m_p > m_e} \frac{t_e}{t_p} < 1$$

۶۵- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد یک رسانای فلزی در حال تعادل درست است؟

- (۱) میدان الکتریکی خالص داخل رسانا ثابت و جهت آن از پتانسیل بیش‌تر به پتانسیل کم‌تر است.
- (۲) بار الکتریکی اضافه‌شده به یک رسانا روی سطح خارجی آن توزیع می‌گردد.
- (۳) با استفاده از آزمایش فاراده می‌توان فهمید که بار اضافی داده‌شده به یک رسانا بیش‌تر در نقاط نوک‌تیز و داخل آن جمع می‌شود.
- (۴) با استفاده از قفس فاراده و کاربردهایش می‌توان فهمید معمولاً شخصی که داخل اتومبیل یا هواپیما است از خطر آذرخش در امان نمی‌ماند.

(آسان - مفهومی - سریع ۶ - صفحه ۲۸ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ① میدان الکتریکی خالص داخل رسانا **صفر** است. دقت کنید که همهٔ نقاط یک رسانا **پتانسیل یکسانی** دارند. (*)
- ③ در آزمایش فاراده بار اضافهٔ داده‌شده به یک رسانا، در سطح **خارجی** آن جمع می‌شود. (*)
- ④ شخصی که داخل اتومبیل یا هواپیما است، معمولاً از خطر آذرخش در امان **می‌ماند**. (*)



بودجه‌بندی
این آزمون

شیمی ۳: آسایش و رفاه در سایه شیمی (از جاری شدن انرژی با سفر الکترون تا انتهای آبکاری) صفحه‌های ۴۲ تا ۶۰
شیمی پایه: قدر هدایای زمینی را بدانیم (تا انتهای دنیای واقعی واکنش‌ها) صفحه‌های ۱ تا ۲۵

سهم در
کنکور

مباحث این آزمون در مجموع ۵ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

- ۶۶- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟ (در نام‌گذاری هر سلول گالوانی، فلز اول معادل با آند و فلز دوم معادل با کاتد است.)
- الف - اگر فلز A به‌طور طبیعی با محلول فلز D واکنش دهد، این فلز در جدول پتانسیل کاهش پایین‌تر از فلز D قرار دارد.
- ب - اگر ولتاژ سلول گالوانی (روی - X) از سلول (روی - Y) بزرگ‌تر باشد، قدرت اکسندگی X^{2+} از Y^{2+} کمتر است.
- ج - با قرار گرفتن یک تیغه مسی در محلول نقره نیترات، مقداری گرما آزاد شده و رنگ محلول از بین می‌رود.
- د - از ظروف مسی می‌توان برای نگهداری یک نمونه از محلول آهن(II) سولفات استفاده کرد.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۴۷ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

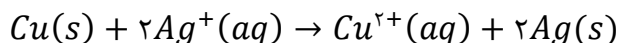
عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) اگر فلز A به‌طور طبیعی با محلول فلز D واکنش بدهد، می‌توان گفت این فلز در مقایسه با فلز D کاهنده‌تر بوده و در جدول پتانسیل کاهش نیز در موقعیت پایین‌تر از فلز D قرار می‌گیرد.

ب) در روند نام‌گذاری هر دو سلول داده شده، اسم تیغه روی قبل از اسم تیغه دیگر آورده شده است. در این دو سلول گالوانی، تیغه روی آند است و با توجه به رابطه (آند) $E^\circ -$ (کاتد) $emf = E^\circ$ ، می‌توان گفت که $E^\circ(X) > E^\circ(Y)$ و در نتیجه مقایسه قدرت اکسندگی (تمایل به گرفتن الکترون از سایر گونه‌ها و کاهش یافتن) یون‌های مربوطه به‌صورت $X^{2+} > Y^{2+}$ خواهد بود. توجه داریم که هرچه فلزی در سری الکتروشیمیایی بالاتر باشد (پتانسیل کاهش بزرگ‌تری داشته باشد)، کاتیون آن فلز قدرت اکسندگی بیشتری خواهد داشت.

ج) فلز مس در مقایسه با نقره، پتانسیل کاهش استاندارد کوچک‌تری دارد. بر این اساس، می‌توان گفت فلز مس کاهنده‌تر از نقره بوده و با وارد شدن یک تیغه فلزی از آن به محلولی از نقره نیترات، واکنش زیر انجام می‌شود:



با انجام شدن این واکنش، مقداری یون Cu^{2+} وارد محلول شده و به همین خاطر، این محلول رنگ آبی پیدا می‌کند. چون این واکنش در جهت طبیعی به پیش می‌رود، گرماده بوده و دمای محلول را به‌تدریج افزایش می‌دهد. توجه داریم که کاتیون نقره موجود در محلول اولیه رنگ ندارد و به همین خاطر، محلول نقره نیترات بی‌رنگ است.

د) چون مس در مقایسه با آهن دارای پتانسیل کاهش استاندارد بالاتری است، با ریختن محلول آهن(II) سولفات در ظرف مسی، هیچ واکنشی بین ظرف و محلول انجام نشده و ظرف سالم باقی می‌ماند.

انتخاب ظرف مناسب آزمایشگاهی

برای نگهداری یک محلول شیمیایی، جنس ظرف باید از فلزی انتخاب شود که E° آن بالاتر (مثبت‌تر) از کاتیون‌های موجود در محلول باشد. در این صورت، فلز سازنده ظرف با کاتیون‌های موجود در محلول دچار واکنش نمی‌شود و محلول موردنظر را می‌توان در این ظرف نگهداری کرد. اگر مقدار E° کاتیون‌های موجود در محلول بزرگ‌تر (مثبت‌تر) از E° فلز سازنده ظرف محتوی آن محلول باشد، این کاتیون‌ها با اتم‌های فلزی سازنده ظرف وارد واکنش شده و آن‌ها را اکسید می‌کنند. ادامه این فرایند، موجب خوردگی ظرف و در نهایت سوراخ شدن آن می‌شود.

۶۷- یک مخزن ۱۱۲ لیتری، حاوی ۵۰ گرم گاز هیدروژن در دمای 0°C است. اگر این مخزن را به یک سلول سوختی متصل کنیم، از ابتدای کار تا لحظه‌ای که فشار گاز درون مخزن به یک اتمسفر می‌رسد، چند الکترون در مدار خارجی سلول جاری شده و در طول این فرایند، چند گرم گاز اکسیژن با خلوص ۵۰٪ در این سلول مصرف می‌شود؟ ($H = 1, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

$$320 - 1/204 \times 10^{25} \quad (2)$$

$$160 - 1/204 \times 10^{25} \quad (1)$$

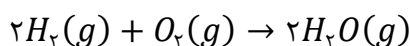
$$640 - 2/408 \times 10^{25} \quad (4)$$

$$320 - 2/408 \times 10^{25} \quad (3)$$

(سخت - مسئله - زمان بر ۱ - صفحه ۵۲ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

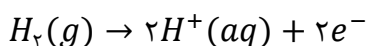
در سلول‌های سوختی $H_2 - O_2$ ، گاز هیدروژن وارد آند شده و پس از مصرف مقداری از آن، باقی‌مانده هیدروژن از سمت دیگر آند خارج می‌شود. همچنین گاز اکسیژن وارد کاتد شده و پس از مصرف، از طرف دیگر کاتد بخار آب خارج می‌شود. واکنش سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، به صورت زیر است:



طبق فرض سؤال، مخزن ۱۱۲ لیتری حاوی ۵۰ گرم گاز هیدروژن در دمای 0°C است. این مخزن را به یک سلول سوختی متصل کرده و در نهایت، فشار گاز درون مخزن به یک اتمسفر رسیده است. باید جرم گاز هیدروژن باقی‌مانده در مخزن را محاسبه کنیم. توجه داریم که در انتهای این فرایند، شرایط حاکم بر مخزن کاملاً با شرایط استاندارد (STP) مطابقت دارد. بر این اساس، داریم:

$$? g H_2 = 112 L H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{22.4 L H_2} \times \frac{2 g H_2}{1 \text{ mol } H_2} = 10 g$$

در ابتدای کار، ۵۰ گرم گاز هیدروژن در مخزن وجود داشته و در انتها، ۱۰ گرم از آن در مخزن باقی‌مانده است. طی این فرایند، مقدار ۴۰ گرم گاز هیدروژن در سمت آند مصرف شده است. معادله نیم‌واکنش آندی این سلول، به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، مقدار الکترون مبادله‌شده در مدار خارجی را محاسبه می‌کنیم:

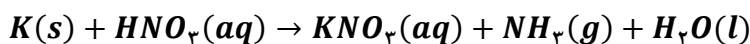
$$? e^- = 40 g H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 g H_2} \times \frac{2 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol } H_2} \times \frac{6.02 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mol } e^-} = 2/408 \times 10^{25} e^-$$

جرم اکسیژن مصرف‌شده برابر است با:

$$? g O_2 = 40 g H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 g H_2} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } H_2} \times \frac{32 g O_2}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{100 g O_2}{50 g O_2} = 640 g$$



۶۸- پس از موازنه معادله واکنش زیر، مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های نیتروژن شرکت‌کننده در این واکنش، برابر با مجموع قدر مطلق عدد اکسایش اتم‌های کربن در کدام ترکیب است؟



(۴) نفتالن

(۳) آلومینیم کربنات

(۲) اوره

(۱) استیک اسید

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۵۳ - ۱۲۰۲)

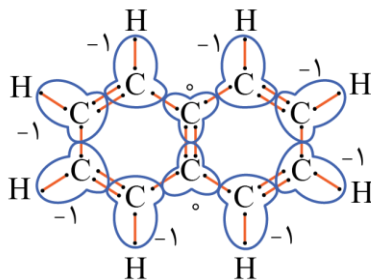
پاسخ: گزینه ۴

معادله موازنه شده این واکنش شیمیایی به صورت زیر است:



در این واکنش، عدد اکسایش اتم پتاسیم از صفر در ساختار $K(s)$ ، به عدد +۱ در ساختار KNO_3 رسیده است. از ۹ اتم نیتروژن موجود در ساختار HNO_3 که همگی عدد اکسایش +۵ دارند، عدد اکسایش ۸ اتم نیتروژن ثابت باقی مانده و عدد اکسایش یک اتم نیتروژن به اندازه ۸ واحد کاهش پیدا کرده است. این اتم نیتروژن، در ساختار NH_3 وجود داشته و عدد اکسایش آن برابر با -۳ است. با توجه به توضیحات داده شده، می‌توان گفت در واکنش مورد نظر، ۸ اتم پتاسیم در نقش کاهنده بوده و یک اتم نیتروژن، در نقش اکسنده است. چون عدد اکسایش یک اتم نیتروژن به اندازه ۸ واحد تغییر کرده و عدد اکسایش سایر اتم‌های نیتروژن ثابت باقی مانده است؛ پس می‌توان گفت مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های نیتروژن شرکت‌کننده در این واکنش برابر با ۸ واحد است.

ساختار مولکول نفتالن و عدد اکسایش کربن موجود در آن، به صورت زیر است:



در ساختار این ماده، ۸ اتم کربن با عدد اکسایش -۱ و دو اتم کربن با عدد اکسایش صفر وجود دارد، پس می توان گفت مجموع قدر مطلق عدد اکسایش اتم های کربن در نفتالن برابر با ۸ است. توجه داریم که مجموع قدر مطلق عدد اکسایش اتم های کربن در ساختار استیک اسید، اوره و آلومینیم کربنات، به ترتیب برابر با ۶، ۴ و ۱۲ است.



۶۹- با توجه به داده های زیر، چند مورد از مطالب داده شده درباره سلول های گالوانی ساخته شده از این نیم سلول ها درست است؟

$$E^{\circ}[Pt^{2+}(aq)/Pt(s)] = +1/2 V, \quad E^{\circ}[Ag^{+}(aq)/Ag(s)] = +0/8 V$$

$$E^{\circ}[Al^{3+}(aq)/Al(s)] = -1/66 V, \quad E^{\circ}[Mg^{2+}(aq)/Mg(s)] = -2/37 V$$

الف - در معادله موازنه شده واکنش سلولی با کمترین emf ، در مجموع ۲ الکترون مبادله می شود.

ب - در سلول گالوانی آلومینیم-نقره، الکترون های موجود در مدار به سمت تیغه نقره حرکت می کنند.

ج - شیب نمودار مربوط به تغییر غلظت کاتیون ها در سلولی با بیشترین مقدار emf ، قرینه یکدیگر خواهد بود.

د - با انتقال $10^{22} \times 7/224$ الکترون از آند به کاتد سلولی با $emf = 0/71 V$ ، مقدار $0/12$ مول فلز در کاتد تولید می شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

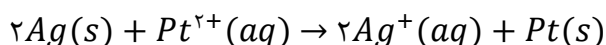
(سخت - مفهومی - استاندارد ۶ - صفحه ۴۹ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

عبارت های (الف)، (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) کمترین مقدار emf ، در سلولی وجود دارد که پتانسیل کاهش استاندارد آند و کاتد آن تا حد امکان به هم نزدیک باشد. بر این اساس، کمترین مقدار emf مربوط به سلول گالوانی نقره-پلاتین است. واکنش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



در این واکنش موازنه شده، در مجموع ۲ الکترون بین گونه های اکسند و کاهنده مبادله شده است.

نیروی الکتروموتوری

نیروی الکتروموتوری (emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با $E^{\circ}_{سلول}$ نشان می دهند. برای پیدا کردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش های زیر می توان کمک گرفت:

۱- نیم سلول های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت سنج اندازه گیری می کنیم.

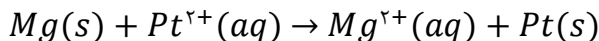
۲- ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی مورد نظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند (الکترودی که E° کوچکتری دارد) را از E° کاتد (الکترودی که E° بزرگتری دارد) کم می کنیم.

پ) در سلول گالوانی آلومینیم-نقره، تیغه نقره در نقش کاتد و تیغه آلومینیم در نقش آند است. در این سلول، الکترون های موجود در مدار خارجی به سمت تیغه نقره حرکت کرده و در نیم سلول نقره موجب کاهش یون های نقره می شوند.

کاتد سلول گالوانی

در یک سلول گالوانی، کاتد الکترودی یا تیغه ای است که نیم واکنش کاهش (نیم واکنش مصرف الکترون) در مجاورت آن اتفاق می افتد. از آنجا که در مجاورت کاتد یک سلول گالوانی نیم واکنش کاهش انجام شده و اتم های فلزی به تیغه می چسبند، به مرور زمان جرم تیغه کاتدی افزایش پیدا کرده و به اصطلاح، این تیغه چاق تر می شود. توجه داریم که در یک سلول گالوانی، الکترودی کاتد با نماد مثبت نشان داده می شود. مدار بیرونی هر سلول نیز از یک سیم رابط تشکیل شده است که در سر راه آن یک وسیله الکترونیکی مثل لامپ، ولت سنج و ... قرار می گیرد. در یک سلول گالوانی، جهت حرکت الکترون ها در مدار خارجی (سیم) از سمت آند به سمت کاتد است.

بیشترین مقدار نیروی الکتروموتوری مربوط به سلول گالوانی منیزیم-پلاتین است. در این سلول، واکنش شیمیایی زیر انجام می‌شود:

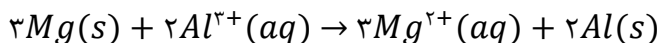


چون ضریب استوکیومتری یون‌ها در معادله این واکنش شیمیایی برابر است، بنابراین شیب نمودار تغییر غلظت آن‌ها قرینه یکدیگر خواهد بود. برای مثال، اگر غلظت یون پلاتین به اندازه ۰/۲ مولار کاهش یابد، غلظت یون منیزیم، به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند.

مقدار emf واکنش‌های انجام شده در سلول‌های گالوانی مختلف، طبق رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$emf = E^{\circ}_{\text{آند}} - E^{\circ}_{\text{کاتد}}$$

بر این اساس، مقدار emf سلول گالوانی منیزیم-آلومینیم برابر ۰/۷۱ است. در این سلول، واکنش زیر انجام می‌شود:



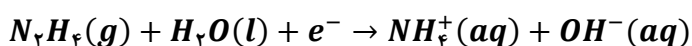
کاتد این سلول، الکتروآلومینیم بوده و به ازای تولید هر مول فلز آلومینیم، ۳ مول الکترون در مدار خارجی سلول مبادله می‌شود. بر این اساس، مقدار فراورده تولید شده در کاتد را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol Al} = 7/224 \times 10^{22} e^{-} \times \frac{1 \text{ mol } e^{-}}{6/02 \times 10^{23} e^{-}} \times \frac{2 \text{ mol Al}}{6 \text{ mol } e^{-}} = 0/04 \text{ mol}$$

با توجه به محاسبات بالا، طی این فرایند ۰/۰۴ مول فلز آلومینیم تولید شده است.



۷۰- نیم‌واکنش موازنه نشده زیر، در یک محلول آبی با $pH = 7$ و حجم ۵ لیتر در حال انجام شدن است. پس از مبادله $6/02 \times 10^{22}$ الکترون در این نیم‌واکنش، pH محلول مورد نظر چقدر می‌شود؟



۱۲/۶ (۴)

۱۲/۴ (۳)

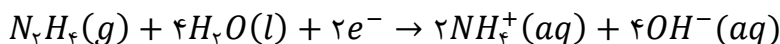
۱۳/۶ (۲)

۱۳/۴ (۱)

(سخت - مسئله - استاندارد ۴ - صفحه ۴۰ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

معادله نیم‌واکنش مورد نظر پس از موازنه، به صورت زیر خواهد بود:



نیم‌واکنش

واکنش‌های اکسایش-کاهش را می‌توان به دو نیم‌واکنش مجزا تقسیم کرد. در واقع، شیمی‌دان‌ها هر یک از فرایندهای گرفتن الکترون (کاهش یافتن) و از دست دادن الکترون (اکسایش یافتن) را با یک نیم‌واکنش نشان می‌دهند. به نیم‌واکنشی که از دست دادن الکترون را نشان می‌دهد، نیم‌واکنش اکسایش و به نیم‌واکنشی که گرفتن الکترون را نشان می‌دهد، نیم‌واکنش کاهش گفته می‌شود. به عنوان مثال، نیم‌واکنش اکسایش آهن به صورت $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^{-}$ و نیم‌واکنش کاهش یون Fe^{3+} به صورت $Fe^{3+}(aq) + e^{-} \rightarrow Fe^{2+}(aq)$ است. همان‌طور که می‌دانیم، در واکنش‌های اکسایش-کاهش، الکترون از یک گونه به گونه دیگر منتقل می‌شود. در این واکنش‌ها، ماده‌ای که با گرفتن الکترون کاهش پیدا کرده و سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود، اکسند نام دارد. در نقطه مقابل، ماده‌ای که با از دست دادن الکترون اکسایش پیدا کرده و سبب کاهش گونه دیگر می‌شود، کاهنده نام دارد.

با مبادله ۲ مول الکترون در این نیم‌واکنش کاهشی، ۴ مول یون هیدروکسید در محلول مورد نظر تولید شده است. بر این اساس، مقدار مول یون هیدروکسید تولید شده در محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol OH}^{-} = 6/02 \times 10^{22} e^{-} \times \frac{1 \text{ mol } e^{-}}{6/02 \times 10^{23} e^{-}} \times \frac{4 \text{ mol OH}^{-}}{2 \text{ mol } e^{-}} = 0/2 \text{ mol}$$

محلول اولیه، $pH = 7$ داشته و کاملاً خنثی است. حجم این محلول آبی نیز برابر با ۵ لیتر است. بر این اساس، غلظت یون هیدروکسید تولید شده در این محلول را محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^{-}] = \frac{\text{مول OH}^{-}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{0/2 \text{ mol OH}^{-}}{5 \text{ L}} = 0/04 \text{ mol.L}^{-1}$$

در قدم بعد، غلظت یون هیدروژن را در محلول مورد نظر محاسبه کرده و pH این محلول را به دست می‌آوریم.

$$[H^{+}] \times [OH^{-}] = 10^{-14} \implies [H^{+}] \times 0/04 = 10^{-14} \implies [H^{+}] = 0/25 \times 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^{+}] = -\log(0/25 \times 10^{-12}) = 12/6$$

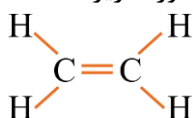
۷۱- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- (۱) پسماندهای الکترونیکی به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و نباید در طبیعت رها شوند.
- (۲) نیم سلول فلز لیتیم در ساختار تمام سلول‌های گالوانی ساخته شده از دو فلز، در نقش قطب منفی خواهد بود.
- (۳) در واکنش سوختن اولین عضو خانواده آلکن‌ها، تغییرات عدد اکسایش هر اتم کربن ۲ برابر هر اتم اکسیژن است.
- (۴) عدد اکسایش نیتروژن در ساختار نیترواسید، بیشتر از عدد اکسایش اتم کربن در ساختار مولکول تری‌فلوئورومتان است.

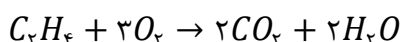
پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۵۰ - ۱۲۰۲

اولین عضو خانواده آلکن‌ها، اتن است. ساختار مولکول اتن به صورت زیر است:



این ماده بر اساس معادله زیر می‌سوزد:



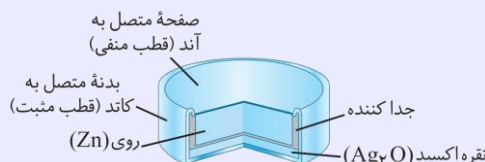
با توجه به معادله نوشته شده، با انجام شدن این واکنش، عدد اکسایش اتم‌های کربن از ۲- به ۴+ افزایش می‌یابد (۶ درجه اکسایش) درحالی که عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن از صفر به ۲- کاهش پیدا می‌کند (۲ درجه کاهش). توجه داریم که در واکنش‌های اکسایش-کاهش، عدد اکسایش برخی از اتم‌ها تغییر می‌کند. در این شرایط، هر عنصری که عدد اکسایش آن افزایش پیدا کند، اکسایش یافته و هر عنصری که عدد اکسایش آن کم‌تر شود نیز کاهش یافته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) پسماندهای الکترونیکی به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و نباید در طبیعت رها یا دفن شوند؛ زیرا با رها شدن این مواد در طبیعت، محیط زیست آلوده می‌شود. از سوی دیگر، برخی از این پسماندها به دلیل داشتن مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت، منبعی برای بازیافت این مواد به شمار می‌روند.
- (۲) در فناوری ساخت باتری، یکی از مهم‌ترین فلزها، لیتیم است. این فلز قلیایی، کمترین چگالی و پتانسیل کاهش استاندارد را میان فلزها به خود اختصاص می‌دهد. بر اساس همین ویژگی، باتری‌های سبک‌تر و با توانایی تولید انرژی الکتریکی بیشتر ساخته شد. لیتیم کمترین پتانسیل استاندارد کاهش را دارد. در سلول‌های گالوانی نیم سلولی با E° کمتر، آند بوده و قطب منفی خواهد بود.

فلز لیتیم و نقش آن در باتری‌ها

با رشد و پیشرفت چشمگیر صنایع، نیاز و تقاضا برای ساخت باتری‌ها با ویژگی‌های گوناگون و کاربرد معین افزایش یافته است. شیمی‌دان‌ها در پی پاسخ به این نیازها، توانستند به فناوری ساخت باتری‌های جدید دست یابند. در این فناوری، نقش فلز لیتیم پررنگ است؛ زیرا لیتیم در میان فلزها دارای کمترین چگالی و منفی‌ترین مقدار پتانسیل کاهش استاندارد است. این ویژگی‌های لیتیم سبب شد راه برای ساخت باتری‌های سبک‌تر (به‌خاطر چگالی کم لیتیم)، کوچک‌تر و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی (به‌خاطر پتانسیل کاهش استاندارد منفی لیتیم) هموار شود. باتری دگمه‌ای از جمله باتری‌های لیتیومی است که در شکل‌ها و اندازه‌های گوناگون به کار می‌رود. این باتری‌ها قابلیت شارژ شدن را ندارند. دسته‌ای دیگر از باتری‌های لیتیومی، آن‌هایی هستند که در تلفن و رایانه همراه به کار می‌روند و می‌توان آن‌ها را بارها شارژ کرد. نوع دیگری از باتری‌های دگمه‌ای، باتری‌های روی-نقره است. ساختار این باتری‌ها نیز به صورت زیر است:



این باتری‌ها، انواعی از سلول‌های گالوانی به شمار می‌روند. واکنش انجام شده در این باتری به صورت $\text{Zn}(s) + 2\text{Ag}^+(s) \rightarrow \text{Zn}^{2+}(s) + 2\text{Ag}(s)$ است. در این سلول گالوانی، فلز روی در نقش آند (قطب منفی) و فلز نقره در نقش کاتد (قطب مثبت) است.

- (۴) عدد اکسایش اتم نیتروژن در نیترواسید (HNO_3) و عدد اکسایش اتم کربن در تری‌فلوئورومتان (CF_3H) را محاسبه می‌کنیم.
 HNO_3 : صفر = $1 \times (+1) + 2 \times (-2) \Rightarrow$ عدد اکسایش اتم نیتروژن = $+3$
 CF_3H : صفر = $1 \times (+1) + 3 \times (-1) \Rightarrow$ عدد اکسایش اتم کربن = $+2$
 همان‌طور که مشخص است، عدد اکسایش اتم نیتروژن در نیترواسید، بیشتر از اتم کربن گفته شده است.

فلوئور نافلزترین عنصر جدول تناوبی است و عدد اکسایش آن در ترکیب با سایر عناصر برابر ۱- می‌شود. بعد از فلوئور، اکسیژن نافلزترین عنصر جدول تناوبی است؛ پس به جز فلوئور، عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن در ترکیب با سایر عناصر برابر ۲- است. جدول زیر، موارد استثنای عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن را نشان می‌دهد:

گونه شیمیایی	OF_2	O_2F_2	HOF	O_3	O_3^{2-}	H_2O_2
عدد اکسایش O	+۲	+۱	۰	-۵/۰	-۱	-۱



۷۲- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

- الف - سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، از دید زیست‌محیطی برتر از سلول سوختی متان بوده، اما خطرناک‌تر از آن است.
 ب - بازده تولید انرژی الکتریکی از سوخت‌های فسیلی در نیروگاه حرارتی تولید برق، بیشتر از سلول‌های سوختی است.
 ج - کاتد سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، در ساختار خود حاوی کاتالیزگر بوده و بخار آب از آن خارج می‌شود.
 د - در شرایط یکسان، حجم گاز مصرف شده در کاتد رایج‌ترین نوع سلول سوختی، ۲ برابر آن است.
- (۱) «الف» و «ب» (۲) «الف» و «ج» (۳) «ب» و «د» (۴) «ج» و «د»

(آسان - مفهومی و حفظی - سریع - صفحه ۵۲ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

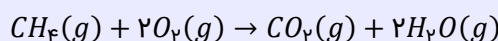
عبارت‌های (الف) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) به هنگام اکسایش هیدروژن در سلول سوختی، تنها ماده تولیدشده آب است. این در حالی است که در فرایند اکسایش متان، علاوه بر آب، مقداری گاز کربن دی‌اکسید نیز تولید می‌شود. گاز کربن دی‌اکسید، گازی گلخانه‌ای بوده که برای محیط زیست مضر است. توجه داریم که احتمال انفجار گاز هیدروژن بیشتر از احتمال انفجار گاز متان بوده و خطر استفاده از سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن بیشتر است. علت این پدیده، پایین‌تر بودن انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن هیدروژن در مقابل انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن گاز متان است.

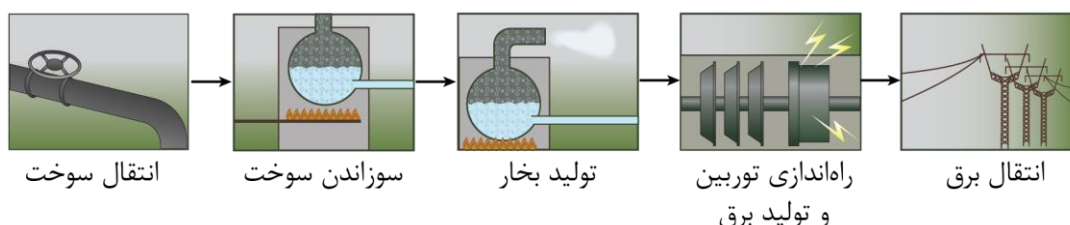
سلول سوختی

در سلول‌های سوختی، یک واکنش شیمیایی در شرایط کنترل‌شده انجام می‌شود. هرچند که در رایج‌ترین نوع از سلول‌های سوختی، گاز هیدروژن به‌عنوان سوخت مصرف می‌شود، اما در برخی از انواع این سلول‌ها از سایر مواد از جمله متان نیز به‌عنوان سوخت استفاده می‌شود. طی این فرایند، عدد اکسایش اتم‌های کربن افزایش یافته و عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن کاهش پیدا می‌کند. توجه داریم که این سلول‌ها با کارکرد خود، نوعی گاز آلاینده (گاز کربن دی‌اکسید) تولید کرده و وارد هوا کرده می‌کنند. واکنش انجام شده در سلول سوختی متان-اکسیژن، همان واکنش اکسایش متان بوده و معادله آن به‌صورت زیر است:



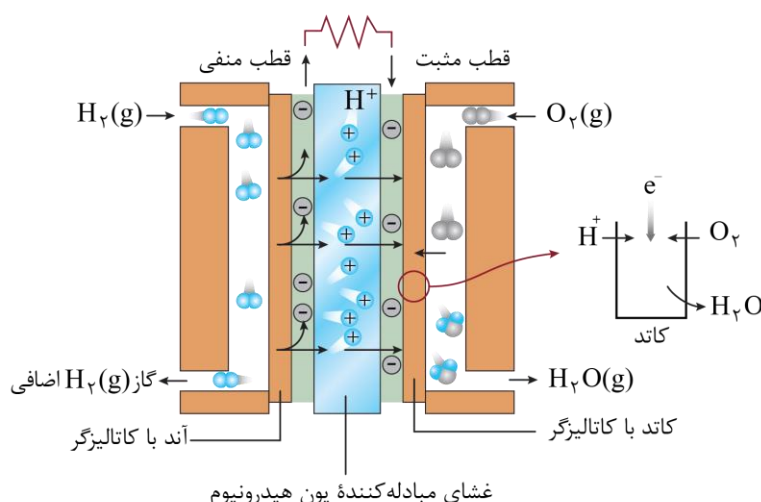
در این واکنش، عدد اکسایش کربن در متان برابر با ۴- بوده و عدد اکسایش آن در کربن دی‌اکسید نیز برابر با ۴+ است؛ در نتیجه عدد اکسایش کربن در این واکنش، ۸ واحد افزایش یافته است.

ب) بازده تولید انرژی الکتریکی از سوخت در نیروگاه حرارتی تولید برق، کمتر از سلول سوختی است. علت این پدیده آن است که در سوختن سوخت‌ها، انرژی در یک لحظه آزاد می‌شود و به همین علت امکان استفاده از همه آن وجود ندارد. همچنین انرژی تولیدشده در این حالت به‌صورت گرما بوده و باید ابتدا به انرژی مکانیکی (به حرکت انداختن توربین‌ها) و سپس به انرژی الکتریکی تبدیل شود که با اتلاف انرژی در هر یک از این تبدیل‌ها همراه است. به علاوه چون سوختن سوخت‌ها یک واکنش خطرناک است، باید در نیروگاه‌ها انجام شود و به هنگام انتقال انرژی الکتریکی تولیدشده به مصرف‌کننده نیز، بخشی از آن هدر می‌رود. تصویر زیر، نمایی از فرایند تولید انرژی در این نیروگاه‌ها را نشان می‌دهد:



در نقطه مقابل، در سلول‌های سوختی انرژی به صورت الکتریکی و همچنین به آرامی از اکسایش سوخت آزاد می‌شود و با توجه به کم‌خطر بودن آن، می‌توان به مانند باتری در محل مصرف برق، از این سلول استفاده کرد. توجه داریم که سوزاندن گاز هیدروژن در موتور درون‌سوز، بازدهی نزدیک به ۲۰ درصد و اکسایش آن در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، در حدود ۶۰ درصد بازده دارد.

در تیغه‌های آندی و کاتدی سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، یک کاتالیزگر مناسب قرار داده شده است. به طور کلی، کاتالیزگرها انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها را کاهش داده و باعث افزایش سرعت واکنش می‌شوند. البته، توجه داریم که استفاده از کاتالیزگرها هیچ تغییری در مقدار تغییر آنتالپی واکنش‌ها ایجاد نمی‌کنند. معادله نیم‌واکنش کاهش در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن به صورت $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(g)$ بوده و بخار آب از سمت کاتد (قطب مثبت این سلول) این سلول خارج می‌شود. تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:



توجه داریم که از آند این سلول نیز گاز هیدروژن اضافی (گاز هیدروژن واکنش نداده) خارج می‌شود.

رایج‌ترین سلول سوختی، سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن است که در آن واکنش $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$ انجام می‌شود. در شرایط یکسان، حجم گاز هیدروژن مصرف شده در آند این سلول، ۲ برابر حجم گاز اکسیژن مصرف شده در کاتد آن است.



۷۲- در سلول گالوانی آلومینیوم-روی، در هر ثانیه $24/08 \times 10^{21}$ الکترون از سیم متصل‌کننده دو الکترود عبور می‌کند. اگر در نیم‌سلول کاتدی، ۷۰ درصد از یون‌های Zn^{2+} بر روی سطح کاتد رسوب کنند، پس از گذشت نیم ساعت از شروع واکنش، چند گرم به جرم تیغه کاتدی افزوده می‌شود؟ ($Zn = 65 : g.mol^{-1}$)

۱۴۲۶ (۴)

۱۶۳۸ (۳)

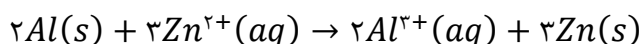
۲۳۴۰ (۲)

۳۳۴۲ (۱)

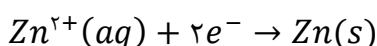
(متوسط - مسئله - استاندارد ۶ - صفحه ۴۶ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

واکنش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



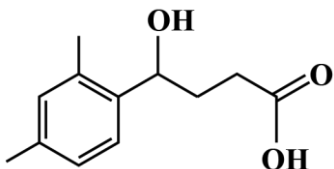
در این واکنش شیمیایی به ازای تولید هر مول Zn ، مقدار ۲ مول الکترون بین گونه‌های کاهنده و اکسنده مبادله شده است. معادله نیم‌واکنش کاهش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



طبق فرض سؤال، در هر ثانیه تعداد $24/08 \times 10^{21}$ الکترون (معادل با $0/04$ مول الکترون) از سیم (مدار خارجی) عبور می‌کند؛ در نتیجه در مدت زمان ۳۰ دقیقه (۱۸۰۰ ثانیه)، ۷۲ مول الکترون از آند به کاتد جریان داشته است. یون‌های Zn^{2+} با تبدیل شدن به اتم‌های Zn بر روی کاتد رسوب می‌کنند. اگر فرض کنیم کل (۱۰۰ درصد) این یون‌ها کاهش پیدا کنند، تغییر جرم تیغه کاتدی برابر است با:

$$? g Zn = 72 mol e^- \times \frac{1 mol Zn}{2 mol e^-} \times \frac{65 g Zn}{1 mol Zn} = 2340 g$$

اگر کل یون‌های روی به اتم روی تبدیل شوند و بر روی کاتد رسوب کنند، 2340 گرم به جرم تیغه کاتدی افزوده می‌شود؛ ولی طبق فرض سؤال 70 درصد از یون‌ها با تبدیل شدن به اتم روی بر روی کاتد رسوب کرده‌اند؛ در نتیجه 1638 گرم ($2340 \times \frac{70}{100} = 1638 \text{ g}$) رسوب بر روی تیغه کاتدی ایجاد شده است.



۷۴- در رابطه با ترکیب مقابل، کدام مطلب زیر نادرست است؟

- (۱) این ماده، همانند پاک‌کننده‌های غیرصابونی، یک ترکیب آروماتیک است.
- (۲) عدد اکسایش ۳ مورد از اتم‌های کربن موجود در ساختار آن برابر صفر است.
- (۳) با انحلال یک نمونه از این ماده در آب، غلظت یون هیدروکسید کاهش می‌یابد.
- (۴) شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار آن، کمتر از ۳ برابر شمار این اتم‌ها در استون است.

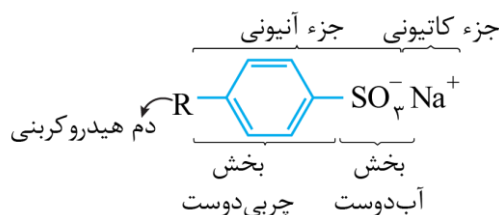
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۵۳ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

در ساختار حلقه بنزنی از این ترکیب، ۳ اتم کربن وجود دارد که فقط به اتم‌های کربن متصل شده‌اند. عدد اکسایش این ۳ اتم کربن، برابر با صفر است. اتم کربن متصل به گروه الکلی نیز دارای عدد اکسایش صفر است. اتم کربن موجود در گروه کربوکسیل این ماده نیز دارای عدد اکسایش ۳+ بوده و سایر اتم‌های کربن، عدد اکسایش منفی دارند.

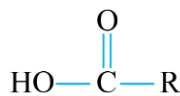
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی یک حلقه بنزنی وجود دارد که به زنجیر آلکیلی متصل است. ساختار کلی این مواد به صورت زیر است:



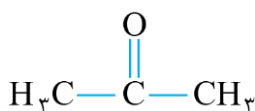
در ساختار این مواد، حلقه بنزنی وجود دارد. در ساختار ترکیب داده شده در صورت سؤال نیز یک حلقه بنزنی وجود دارد که در آن ۳ پیوند دوگانه بین اتم‌های کربن برقرار شده است.

۳) کربوکسیلیک اسیدها، انواعی از اسیدهای ضعیف بوده و K_a کوچکی دارند. توجه داریم که با افزایش تعداد اتم‌های کربن موجود در ساختار این مواد، قدرت اسیدی آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. ساختار گروه عاملی موجود در کربوکسیلیک اسیدها به صورت زیر است:



در این مواد، تنها اتم H گروه کربوکسیل می‌تواند به صورت یون H^+ وارد محلول شود. با انحلال این مواد در آب، غلظت یون هیدروژن در محلول بیشتر شده و غلظت مولی یون هیدروکسید کاهش پیدا می‌کند.

۴) در ساختار این ماده، ۱۲ اتم کربن، ۱۶ اتم هیدروژن و ۳ اتم اکسیژن وجود دارد. در ساختار مولکول استون نیز ۳ اتم کربن، ۶ اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن وجود دارد. ساختار مولکولی این ماده به صورت زیر است:



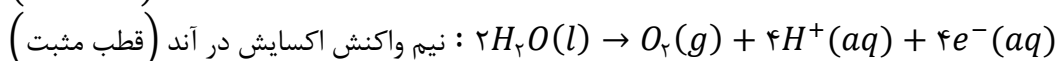
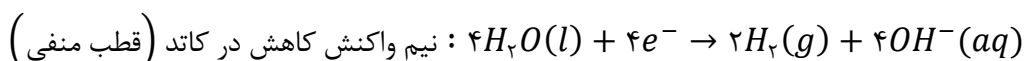
۷۵- کدام یک از مطالب زیر، درست است؟

- (۱) با افزودن نمک کلسیم کلرید به محلول آبی سدیم کلرید، سرعت برقکافت این ماده و تولید فلز سدیم افزایش می‌یابد.
- (۲) با کارکرد سلول الکترولیتی مربوط به برقکافت آب، مقدار pH محلول موجود در پیرامون تیغه آندی کاهش می‌یابد.
- (۳) در مراحل استخراج منیزیم از آب دریا، پس از عبور از $MgCl_2(s)$ از صافی، این ماده را با $NaOH$ واکنش می‌دهند.
- (۴) عنصر تولید شده در آند سلول برقکافت سدیم کلرید، نسبت به سایر عناصر هم‌تناوب خود شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد.

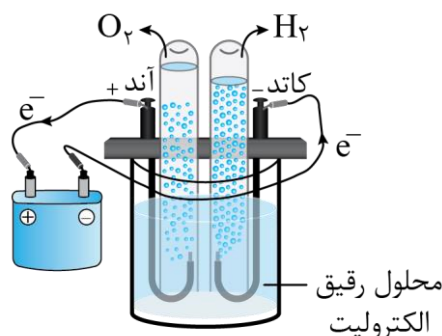
پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی و حفظی - سریع ۶ - صفحه ۵۶ - ۱۲۰۲)

برقکافت آب فرایندی است که جریان برق از درون آب عبور داده شده و مولکول آب به عنصرهای سازنده خود یعنی H_2 و O_2 تجزیه می‌شود. نیم‌واکنش‌های انجام شده در این فرایند به‌صورت مقابل است:



مطابق نیم‌واکنش‌های بالا، pH محلول پیرامون آند، کاهش یافته و pH محلول پیرامون کاتد افزایش می‌یابد. تصویر زیر، نمایی از سلول برقکافت آب را نشان می‌دهد:



برقکافت آب

از اکسایش آب در مجاورت آند، یون هیدروژن و از کاهش آب در مجاورت کاتد، یون هیدروکسید تولید می‌شود. به خاطر تولید این یون‌ها، محلول اطراف آند خاصیت اسیدی پیدا کرده و محلول اطراف کاتد خاصیت بازی پیدا می‌کند. بر این اساس، رنگ کاغذ pH در اطراف محلول کاتدی آبی و در اطراف محلول آندی قرمز می‌شود. از آن‌جا که تعداد یون‌های هیدروکسید تولیدشده در کاتد با تعداد یون‌های هیدروژن تولیدشده در آند برابر است، محلول موردنظر به‌طور کلی خاصیت اسیدی یا بازی پیدا نکرده و pH آن همواره برابر ۷ باقی می‌ماند.

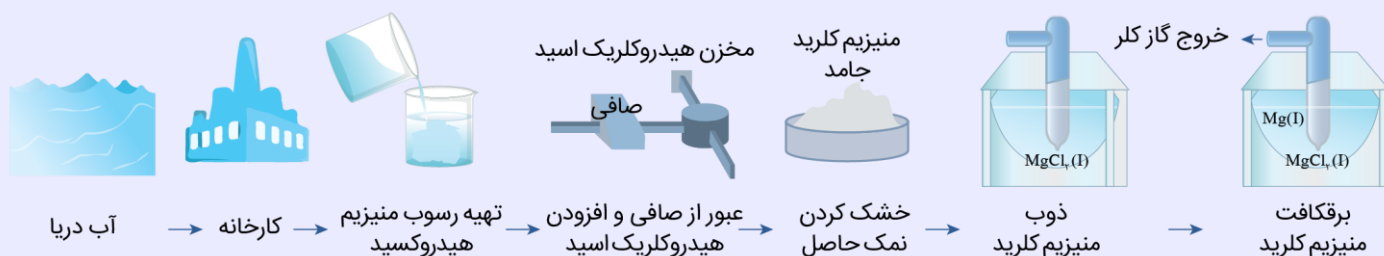
بررسی سایر گزینه‌ها:

چون مولکول‌های آب در مقایسه با یون سدیم قدرت اکسندگی بالاتری دارند، برای به‌دست آوردن فلز سدیم نمی‌توان از برقکافت محلول آبی سدیم کلرید استفاده کرد. برای این منظور، باید از سدیم کلرید مذاب در یک سلول الکترولیتی استفاده شود تا یون سدیم بتواند در نیم‌واکنش کاهش شرکت کرده و فلز سدیم را تولید کند. توجه داریم که با افزودن کلسیم کلرید به سدیم کلرید، دمای ذوب این ماده از $801^\circ C$ به $587^\circ C$ سانتی‌گراد، به $587^\circ C$ سانتی‌گراد کاهش پیدا می‌کند. این فرایند سبب کاهش انرژی موردنیاز برای ذوب سدیم کلرید می‌شود. البته از آن‌جا که $E^\circ(Ca^{2+}/Ca)$ کم‌تر از $E^\circ(Na^+/Na)$ است، وجود یون‌های کلسیم در مخلوط واکنش مزاحمتی برای کاهش یون‌های سدیم ایجاد نمی‌کند.

آب دریا یکی از منابع مورداستفاده برای استخراج فلز منیزیم به حساب می‌آید. برای این منظور، یون منیزیم موجود در آب را ابتدا به‌صورت رسوب منیزیم هیدروکسید در می‌آورند و از سایر یون‌های موجود در آب جدا می‌کنند. پس از عبور رسوب منیزیم هیدروکسید از صافی، این ماده را بر اساس معادله شیمیایی $Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O(l)$ با هیدروکلریک اسید وارد واکنش کرده و در مرحله بعد، آب موجود در محلول حاصل را تبخیر می‌کنند. نمک خشک تولید شده را در مرحله بعد ذوب کرده و پس از آن، برقکافت می‌کنند.

فرایند استخراج منیزیم از آب دریا

تصویر زیر، نمایی از فرایند استخراج فلز منیزیم از آب دریا را نشان می‌دهد:



طی این فرایند، پس از انتقال آب دریا به کارخانه، منیزیم موجود در آن را در قالب ماده جامد و نامحلول منیزیم هیدروکسید رسوب داده و از سایر یون‌های موجود در آب جدا می‌کنند. در مرحله بعد، با اضافه کردن هیدروکلریک اسید به رسوب منیزیم هیدروکسید، آن را به منیزیم کلرید تبدیل کرده و پس از آن، آب موجود در محلول را تبخیر می‌کنند تا منیزیم کلرید جامد به دست بیاید. در مرحله آخر، منیزیم کلرید حاصل را ذوب کرده و به کمک جریان الکتریکی و یک سلول الکترولیتی آن را برقکافت می‌کنند تا فلز منیزیم مذاب و گاز کلر به دست بیایند.

واکنش شیمیایی انجام‌شده در سلول مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب، همانند واکنش انجام‌شده در سایر سلول‌های الکتریکی، در خلاف جهت طبیعی به پیش رانده می‌شود. در آند سلول مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب، گاز کلر تولید شده و در سمت کاتد این سلول نیز فلز سدیم تولید می‌شود. از آنجا که در هر تناوب با حرکت از چپ به راست، شعاع اتمی عناصر کاهش پیدا می‌کند، می‌توان گفت عنصر کلر بعد از آرگون، در مقایسه با سایر عناصر هم‌تناوب خود شعاع کوچک‌تری دارد.



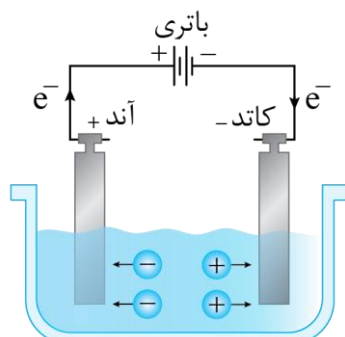
۷۶- کدامیک از مطالب زیر در مورد سلول‌های الکترولیتی نادرست است؟

- (۱) در اغلب مواقع، الکترودهای به کاررفته در ساختار آن‌ها از جنس یک نافلز هستند.
- (۲) به مرور زمان در اطراف الکترود منفی آن‌ها، غلظت یون‌های با بار منفی کاهش می‌یابد.
- (۳) در نیم‌واکنش انجام‌گرفته در مجاورت کاتد، الکترون در سمت چپ معادله قرار می‌گیرد.
- (۴) فراورده‌های واکنش انجام‌گرفته در آن‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها به یقین پایدارتر هستند.

(متوسط - مفهومی - سریع ۶ - صفحه ۵۴ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

سلول‌های الکترولیتی دسته‌ای از سلول‌های الکتروشیمیایی هستند که در آن‌ها با مصرف انرژی الکتریکی، واکنش‌هایی که به صورت طبیعی انجام نمی‌شوند، در محیط آزمایشگاهی یا صنعتی انجام می‌شوند و منجر به تولید یک یا چند ماده خواهند شد. در واقع در این سلول‌ها انرژی الکتریکی به انرژی شیمیایی نهفته در ماده تولیدشده تبدیل خواهد شد. ساختار یک نمونه کلی از این سلول‌ها به صورت زیر است:



در سلول‌های الکترولیتی، الکترودهای مختلف مانند محلول نمک‌ها و نمک‌های مذاب برقکافت می‌شوند. از این سلول‌ها به خصوص در استخراج فلزها (مانند فرایند هال و تولید سدیم و منیزیم)، تولید گاز هیدروژن (سلول برقکافت آب) و آبکاری استفاده می‌شود.

جدول زیر سلول الکترولیتی و گالوانی را با یکدیگر مقایسه می کند:

سلول الکترولیتی	سلول گالوانی	emf سلول
منفی (واکنش غیر خود به خودی)	مثبت (واکنش خود به خودی)	
اکسایش	اکسایش	نیم واکنش آندی
کاهش	کاهش	نیم واکنش کاتدی
آند (محل اکسایش)	کاتد (محل کاهش)	قطب مثبت
کاتد (محل کاهش)	آند (محل اکسایش)	قطب منفی
از قطب مثبت به قطب منفی (از آند به کاتد)	از قطب منفی به قطب مثبت (از آند به کاتد)	جهت حرکت الکترون در مدار خارجی
کاتد (قطب منفی)	کاتد (قطب مثبت)	جهت حرکت کاتیون
آند (قطب مثبت)	آند (قطب منفی)	جهت حرکت آنیون
غیر ضروری	لازم	وجود دیواره متخلخل
مثبت	منفی	علامت آنتالپی

واکنش های انجام گرفته در سلول های گالوانی گرماده بوده و با کاهش سطح انرژی مواد و پایدارتر شدن آن ها همراه است. واکنش های رخ داده در سلول های الکترولیتی قرینه واکنش های سلول های گالوانی بوده و گرماگیر هستند. پس فراورده های سلول الکترولیتی سطح انرژی بالاتری نسبت به واکنش دهنده ها دارند و ناپایدارتر هستند.

بررسی سایر گزینه ها:

اغلب الکترودهای به کاررفته در سلول های الکترولیتی از جنس گرافیت هستند. البته، مورد استثنا برای این قضیه، برخی از سلول ها مثل سلول آبکاری است. توجه داریم که اکثر الکترودهای به کاررفته در سلول های گالوانی از جنس فلزهای شرکت کننده در واکنش هستند. البته، در نیم سلول SHE و سلول های سوختی، این قاعده صدق نمی کند.

گرافیت

گرافیت یک جامد کووالانسی سیاه رنگ و کدر است که چینش اتم های کربن در آن به صورت دو بعدی است. در واقع، گرافیت ساختار لایه ای دارد و در هر لایه از آن، اتم های کربن مطابق با یک ساختار دوبعدی به یکدیگر متصل شده اند. از آنجا که بین لایه های مختلف سازنده گرافیت نیروی ضعیف واندروالسی وجود دارد، این لایه ها می توانند به راحتی بر روی یکدیگر بلغزند و به همین خاطر، گرافیت برخلاف الماس ماده بسیار نرمی است. با توجه به فاصله نسبتاً زیاد میان لایه های کربنی موجود در ساختار گرافیت، تراکم اتم های کربن در این ماده کمتر از تراکم اتم های کربن در الماس است و به همین خاطر، چگالی گرافیت کمتر از چگالی الماس خواهد بود.

الکتروده منفی در سلول های الکترولیتی، کاتد است. در سلول های الکتروشیمیایی، در الکترولیت، آنیون ها به سمت آند و کاتیون ها به سمت کاتد پیش می روند. پس غلظت آنیون (یون هایی با بار منفی) اطراف کاتد کاهش و اطراف آند افزایش خواهد یافت.

در سلول های الکتروشیمیایی (یعنی هم گالوانی و هم الکترولیتی)، کاتد محل انجام نیم واکنش کاهش است. در نیم واکنش کاهش الکترون مصرف شده و در سمت واکنش دهنده ها یعنی سمت چپ قرار دارد.



۷۷- با توجه به داده های موجود در جدول زیر، از فلز می توان برای جلوگیری از خوردگی فلز B استفاده کرد و در سلول گالوانی حاصل از دو فلز M و X ، تیغه فلزی در نقش قطب منفی سلول خواهد بود.

فلز	A	X	M	Z	B
پتانسیل کاهش استاندارد	-0.38	$+0.46$	-1.13	$+1.08$	-0.14

$X - Z$ (۴)

$X - M$ (۳)

$M - A$ (۲)

$M - X$ (۱)

یکی از روش‌های جلوگیری از خوردگی فلزها، محافظت کاتدی است. در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را در تماس با یک فلز دیگری قرار می‌دهند که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. در این شرایط، فلزهای موردنظر برای از دست دادن الکترون و اکسایش یافتن با یکدیگر رقابت می‌کنند. فلزی که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد در نقش آند اکسید می‌شود، اما فلزی که E° بزرگ‌تری دارد در نقش کاتد ظاهر شده و در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

جلوگیری از خوردگی

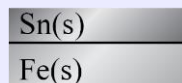
وسایل آهنی در هوای مرطوب زنگ زده و پس از آن دچار خوردگی می‌شوند. این فرایند، یک واکنش اکسایش-کاهش نامطلوب و ناخواسته است که در شهرهای بندری و ساحلی به مقدار بیشتری انجام می‌شود. برای جلوگیری از فرایند خوردگی آهن می‌توان از روش‌های زیر استفاده کرد:

- ایجاد پوشش محافظ: ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ بر روی آن است. این پوشش‌ها را می‌توان با روش‌هایی مانند رنگ‌زدن، قیراندود کردن و روکش دادن ایجاد کرده و از رسیدن اکسیژن و رطوبت به سطح آهن جلوگیری کرد. البته، به کمک چنین روش‌هایی نمی‌توانیم به‌طور کامل از خوردگی آهن جلوگیری کنیم؛ زیرا به‌تدریج اکسیژن و رطوبت از روزه‌های موجود در این پوشش‌ها به درون آن‌ها نفوذ می‌کند.
- حفاظت کاتدی: در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را در تماس با یک فلز دیگری قرار می‌دهند که پتانسیل کاهشی استاندارد کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. به این روش جلوگیری از خوردگی فلزها، به اصطلاح حفاظت کاتدی گفته می‌شود.

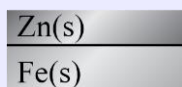
با توجه به توضیحات داده شده، فلزهای A و M در مقایسه با فلز B دارای مقدار E° منفی‌تری بوده و از آن‌ها می‌توان برای محافظت کاتدی از فلز B استفاده کرد. در سلول گالوانی حاصل از دو فلز M و X نیز چون فلز M دارای E° کمتری است، در نقش آند بوده و قطب منفی سلول را تشکیل می‌دهد.

خوردگی آهن

فلزهای نجیبی مانند طلا و پلاتین، حتی در محیط‌های اسیدی اکسایش نمی‌یابند، اما سایر عناصر فلزی مثل آهن، در هوای مرطوب دچار خوردگی می‌شوند. بدیهی است که برای جلوگیری از خوردگی آهن، ساده‌ترین راه ایجاد یک پوشش محافظ است تا از رسیدن اکسیژن و رطوبت به سطح آهن جلوگیری کند. این پوشش را با روش‌هایی مانند رنگ زدن، قیراندود کردن و روکش دادن می‌توان ایجاد کرد. باید توجه داشت که چنین روش‌هایی نمی‌توانند به‌طور کامل از خوردگی آهن پیشگیری کنند؛ زیرا به‌تدریج رطوبت و اکسیژن از روزه‌های این پوشش‌ها به درون نفوذ کرده و به سطح آهن می‌رسند و خوردگی دوباره آغاز می‌شود. در ساختار ورقه‌های حلبی نیز دقیقاً با استفاده از همین روش جلوی خوردگی آهن گرفته می‌شود. ساختار ورقه‌های حلبی به‌صورت زیر است:



راه دیگری که برای جلوگیری از خوردگی آهن از آن استفاده می‌شود، اتصال یک فلز با پتانسیل کاهشی کوچک‌تر به آهن است. در این شرایط، فلز دوم در حضور اکسیژن دچار خوردگی شده و آهن از خوردگی محافظت می‌شود. در ساختار ورقه‌های گالوانیزه نیز دقیقاً با استفاده از همین روش جلوی خوردگی آهن گرفته می‌شود. ساختار ورقه‌های گالوانیزه به‌صورت زیر است:



۷۸- در یک آزمایش برقکافت آب، از ۶۰۰ میلی لیتر محلول $585ppm$ سدیم کلرید به‌عنوان الکترولیت استفاده شده است. اگر آزمایش تا زمانی ادامه پیدا کند که مجموعاً ۶۰۰ لیتر گاز با حجم مولی $24L$ تولید شود، غلظت مولی سدیم کلرید در الکترولیت نهایی به تقریب کدام است؟ (چگالی محلول را $1g \cdot mL^{-1}$ در نظر بگیرید.)

$$(Cl = 35/5, Na = 23, O = 16, H = 1 : g \cdot mol^{-1})$$

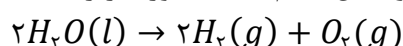
$$0/03 (4)$$

$$0/02 (3)$$

$$0/06 (2)$$

$$0/04 (1)$$

در محلول‌های بسیار رقیق، چگالی محلول به‌طور تقریبی برابر با $1g \cdot mL^{-1}$ در نظر گرفته شده و در نتیجه غلظت $1ppm$ معادل با غلظت ۱ میلی گرم بر لیتر ($1mg \cdot L^{-1}$) است. در محلول اولیه $585ppm$ سدیم کلرید وجود دارد. بر اثر انجام واکنش برقکافت آب، $600L$ گاز با حجم مولی $24L \cdot mol^{-1}$ آزاد شده است. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



به ازای مصرف ۲ مول آب در این واکنش شیمیایی، ۳ مول گاز تولید می‌شود. بنابراین داریم:

$$? \text{ mL } H_2O = 600 \text{ L گاز} \times \frac{1 \text{ mol گاز}}{24 \text{ L گاز}} \times \frac{2 \text{ mol } H_2O}{3 \text{ mol گاز}} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} \times \frac{1 \text{ mL } H_2O}{1 \text{ g } H_2O} = 300 \text{ mL}$$

برقکافت آب

آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد؛ از این رو برای برقکافت آن باید اندکی از یک ماده الکترولیت را به آب اضافه کرد. برای مثال، می‌توان مقدار بسیار کمی سدیم کلرید را به آب اضافه کرد. البته، باید توجه داشته باشیم که آنیون‌ها و کاتیون‌های موجود در الکترولیت موردنظر، نباید در رقابت‌های آندی و کاتدی بر آب پیروز شوند چرا که در این صورت، از فرایند برقکافت گازهای هیدروژن و اکسیژن تولید نشده و مولکول‌های آب تجزیه نمی‌شوند. حجم محلول اولیه برابر با ۶۰۰ میلی‌لیتر بوده و ۳۰۰ میلی‌لیتر از آب موجود در این محلول، طی فرایند برقکافت تجزیه شده است. پس حجم نهایی آب برابر خواهد بود با:

$$600 - 300 = 300 \text{ mL}$$

در قدم بعد، مقدار مول سدیم کلرید موجود در محلول اولیه که در محلول نهایی نیز وجود دارد را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol NaCl} = 600 \text{ mL محلول} \times \frac{1 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{58.5 \text{ g NaCl}}{10^6 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol NaCl}}{58.5 \text{ g NaCl}} = 0.006 \text{ mol}$$

در نهایت غلظت مولی سدیم کلرید را در محلول نهایی محاسبه می‌کنیم:

$$[NaCl] = \frac{0.006 \text{ mol NaCl}}{0.3 \text{ L محلول}} = 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$



۷۹- کدام یک از مطالب زیر، درست است؟

- (۱) در ساختار نوعی آهن که در تهیه قوطی کنسرو کاربرد دارد، فلزی با پتانسیل کاهشی مثبت در سطح قرار گرفته است.
- (۲) ساده‌ترین راه جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد پوشش محافظ است تا از رسیدن O_2 و رطوبت به آهن جلوگیری کند.
- (۳) تمایل اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیط‌هایی که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کنند، کمتر از محیط خنثی است.
- (۴) در فرایند خوردگی آهن، هر اتم فلزی ابتدا فقط ۲ الکترون با $l = 2$ از دست داده و وارد قطره آب می‌شود.

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد ۲ - صفحه ۵۹ - ۱۲۰۲)

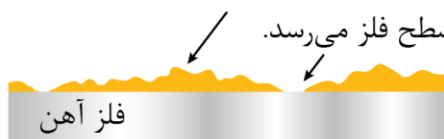
پاسخ: گزینه ۲

برای جلوگیری از فرایند خوردگی آهن، می‌توان از روش‌های زیر استفاده کرد:

- **ایجاد پوشش محافظ:** ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ بر روی آن است. این پوشش‌ها را می‌توان با روش‌هایی مانند رنگ‌زدن، قیراندود کردن و روکش دادن ایجاد کرد.
- **حفاظت کاتدی:** در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را در تماس با یک فلز دیگری قرار می‌دهند که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. توجه داریم که به کمک روش ایجاد پوشش سطحی، نمی‌توانیم به‌طور کامل از خوردگی آهن جلوگیری کنیم، زیرا به تدریج اکسیژن و رطوبت از روزه‌های موجود در این پوشش‌ها به درون آن‌ها نفوذ می‌کند. تصویر زیر، نمایی از این فرایند را نشان می‌دهد:

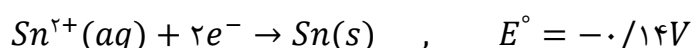
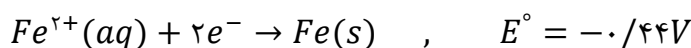
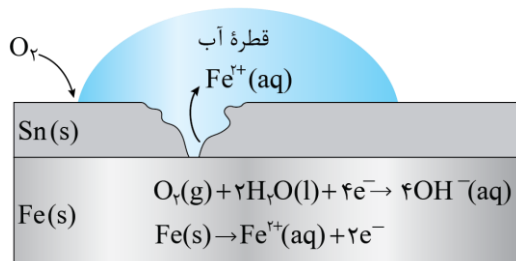
لایهٔ قیر - چون قیر ناقطبی است، رطوبت نمی‌تواند به آن نفوذ کند و به سطح فلز برسد.

منافذ کوچک سطحی که رطوبت از طریق آن‌ها به سطح فلز می‌رسد.



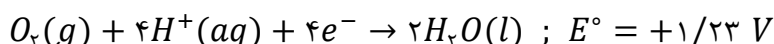
بررسی سایر گزینه‌ها:

یکی از راه‌های محافظت از آهن در مقابل خوردگی، پوشاندن سطح آن با فلزهای دیگر است. آهن گالوانیزه (آهن سفید) و ورقه‌های حلبی، نمونه‌هایی از ورقه‌های آهنی پوشیده‌شده با سایر فلزات هستند. به ورقه‌های آهنی که سطح آن‌ها با لایه نازکی از فلز قلع پوشیده شده باشد، حلبی گفته می‌شود. تصویر زیر، یک قطعه حلبی را نشان می‌دهد:



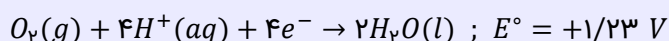
قبل از ایجاد خراش در سطح حلبی، فلز قلع به‌عنوان یک پوشش محافظ از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند. توجه داریم که در این شرایط خود قلع نیز به خاطر ایجاد شدن یک لایه متراکم از اکسیدهای قلع در سطح آن، دچار خوردگی نمی‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، پتانسیل کاهشی استاندارد (E°) قلع، کوچک‌تر از صفر است. طلا، پلاتین، جیوه، نقره و مس، تنها عناصر فلزی هستند که پتانسیل کاهشی استاندارد بزرگ‌تر از صفر دارند.

تمایل مولکول‌های اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیط‌های اسیدی (محیط‌هایی با $pH < 7$ که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کنند)، بیشتر از محیط‌های خنثی است و به همین خاطر، فلز آهن در محیط‌های اسیدی در مقایسه با محیط‌های خنثی با سرعت بیشتری خورده می‌شود. نیم‌واکنش کاهش آب در محیط‌های اسیدی به‌صورت مقابل است:

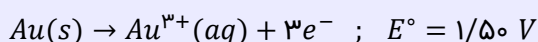


باران اسیدی و خوردگی فلزها

در شهرهایی که هوای آن‌ها حاوی اکسیدهای نیتروژن و گوگرد است، باران‌های اسیدی تشکیل شده و با باریدن باران‌های اسیدی، قطرات آبی که بر روی سطح فلزها قرار می‌گیرند، خاصیت اسیدی پیدا خواهند کرد. تمایل مولکول‌های اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیط‌های اسیدی، بیشتر از محیط‌های خنثی است و به همین خاطر، فلز آهن در محیط‌های اسیدی در مقایسه با محیط‌های خنثی با سرعت بیشتری خورده می‌شود. نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط‌های اسیدی به‌صورت زیر است:



طلا، یکی از فلزهای نجیب است که براساس نیم‌واکنش زیر اکسایش پیدا می‌کند:

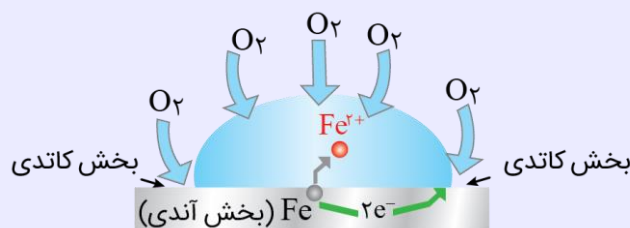


از آن‌جا که پتانسیل کاهشی این نیم‌واکنش بزرگ‌تر از پتانسیل کاهشی نیم‌واکنش کاهش اکسیژن است، مولکول‌های اکسیژن نمی‌توانند اتم‌های طلا را اکسید کنند و به همین علت، با گذشت زمان فلز طلا در هوای مرطوب و حتی در اعماق دریاها همچنان درخشان باقی می‌ماند و زنگ نمی‌زند. فلز پلاتین نیز همانند طلا در دسته فلزهای نجیب قرار دارد و حتی در محیط‌های اسیدی نیز دچار خوردگی نمی‌شود.

در فرایند خوردگی آهن، هر اتم فلزی (اتم Fe) ابتدا ۲ الکترون از بیرونی‌ترین زیرلایه خود (الکترون‌های موجود در زیرلایه $4s$ با عدد کوانتومی فرعی صفر) را از دست داده و به‌صورت یون Fe^{2+} وارد قطره آب می‌شود. این یون با یون هیدروکسید ترکیب شده و به‌صورت آهن (II) هیدروکسید در می‌آید. چون اکسیژن یک اکسنده قوی است، رسوب $Fe(OH)_2$ مجدداً براساس معادله $4Fe(OH)_2(s) + 2H_2O(l) + O_2(g) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$ با اکسیژن وارد واکنش شده و رسوب آهن (III) هیدروکسید را تولید می‌کند.

خوردگی آهن

فلز آهن در واکنش با اکسیژن، اکسایش یافته و با ادامه آن، دچار خوردگی می‌شود. در این فرایند، زنگ آهن تولید می‌شود که یک ماده متخلخل و ترد است. پس می‌توان گفت طی فرایند خوردگی، فلز آهن استحکام خود را از دست می‌دهد. برای ایجاد خوردگی، حضور گاز اکسیژن و رطوبت هوا الزامی است. تصویر زیر، نمایی از واکنش‌های انجام‌شده در مرحله اول خوردگی آهن در مجاورت یک قطره آب را نشان می‌دهد:



در این مرحله این فرایند، نیم‌واکنش‌های زیر انجام می‌شود:



کاتیون‌های Fe^{2+} تولیدشده در بخش آند، از طریق قطره آب به سمت کاتد مهاجرت می‌کنند. این یون‌ها در محل کاتد با یون‌های هیدروکسید تولید شده در آند بر اساس معادله $Fe^{2+}(aq) + 2OH^{-}(aq) \rightarrow Fe(OH)_2(s)$ وارد واکنش شده و رسوب آهن (II) هیدروکسید را تولید می‌کنند. پس از تشکیل آهن (II) هیدروکسید، مرحله دوم از فرایند خوردگی آهن انجام می‌شود. از آنجا که اکسیژن یک اکسنده بسیار قوی است، با کاتیون موجود در رسوب آهن (II) هیدروکسید تولیدشده مجدداً واکنش داده و آن‌ها را اکسید می‌کند. در این مرحله از فرایند مورد نظر، نیم‌واکنش‌های زیر انجام می‌شود:



در واقع، گاز اکسیژن براساس معادله $4Fe(OH)_2(s) + 2H_2O(l) + O_2(g) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$ با رسوب سبز رنگ آهن (II) هیدروکسید وارد واکنش شده و رسوب آجری رنگ آهن (III) هیدروکسید را تولید می‌کنند.



۸۰- جرم قطعه ۱۴۰ گرمی از آهن پس از گذشت یک سال در هوای مرطوب، به ۱۶۰/۴ گرم می‌رسد. در این مدت چند درصد آهن زنگ‌زده است؟ ($H = 1, O = 16, Fe = 56 : g.mol^{-1}$)

۱۴ (۴)

۲۸ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)

(متوسط - مسئله - استاندارد) - صفحه ۵۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

معادله واکنش موازنه‌شده زنگ‌زدن آهن به صورت زیر است:



تغییر جرم قطعه آهنی برابر جرم یون‌های هیدروکسید اضافه‌شده به فلز آهن در واکنش بالا است. طی این فرایند، جرم تیغه آهنی به اندازه ۲۰/۴ گرم افزایش یافته و از ۱۴۰ گرم به ۱۶۰/۴ گرم رسیده است. پس در این ماده ۲۰/۴ گرم یون هیدروکسید وجود دارد. بر این اساس، جرم آهن مصرف‌شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$? g Fe = 20/4 g OH^{-} \times \frac{1 mol OH^{-}}{17 g OH^{-}} \times \frac{1 mol Fe(OH)_3}{3 mol OH^{-}} \times \frac{4 mol Fe}{4 mol Fe(OH)_3} \times \frac{56 g Fe}{1 mol Fe} = 22/4 g$$

حال درصدی از آهن را که در این واکنش اکسایش یافته، حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد آهن خورد شده} = \frac{\text{جرم آهن خورد شده}}{\text{جرم کل آهن}} \times 100 \Rightarrow A = \frac{22/4}{140} \times 100 = 16 \text{ درصد}$$

پس ۱۶ درصد آهن در این واکنش شرکت کرده است.



۸۱- اطلاعات داده شده در چند مورد از ردیف‌های جدول زیر، به صورت نادرست آورده شده است؟

ردیف	ترکیب	زیرلایه‌ای که آرایش الکترونی کاتیون موجود در ترکیب به آن ختم می‌شود.	عنصری که با استفاده از آن، فلز موجود در ترکیب استخراج می‌شود.
۱	آهن (III) اکسید	$3d^5$	کربن
۲	پتاسیم کربنات	$3p^6$	روی
۳	مس (I) سولفید	$3d^{10}$	اکسیژن
۴	تیتانیوم (IV) کلرید	$4s^2$	منیزیم
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - سریع ۶ - صفحه ۲۱ - ۱۱۰۱)

برای استخراج فلزها از ترکیبات یونی حاوی آن عنصر فلزی، ترکیب مورد نظر را با عنصری که واکنش‌پذیری بیشتری دارد، وارد واکنش کرده و فلز مورد نظر را از ترکیب خارج می‌کنند. مقایسه کلی واکنش‌پذیری عناصر فلزی مختلف به صورت زیر است:

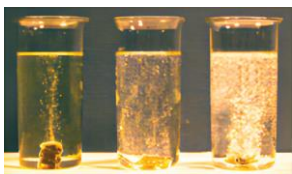
فلزهای قلیایی < فلزهای قلیایی خاکی < آلومینیم < تیتانیوم < روی < آهن < مس < نقره < طلا : واکنش‌پذیری از میان عناصر گفته شده، فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی دارای بالاترین واکنش‌پذیری و فلزهای طلا و نقره، دارای کمترین مقدار واکنش‌پذیری هستند. اطلاعات درست جدول مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

ردیف	ترکیب	نماد کاتیون	زیرلایه‌ای که آرایش الکترونی کاتیون موجود در ترکیب به آن ختم می‌شود	عنصری که با استفاده از آن، فلز موجود در ترکیب استخراج می‌شود
۱	آهن (III) اکسید	Fe^{3+}	$3d^5$	کربن - سدیم - پتاسیم
۲	پتاسیم کربنات	K^+	$3p^6$	روبییدیم - سزیم
۳	مس (I) سولفید	Cu^+	$3d^{10}$	اکسیژن - کربن - پتاسیم - سدیم
۴	تیتانیوم (IV) کلرید	Ti^{4+}	$3p^6$	منیزیم - سدیم - پتاسیم

با توجه به اطلاعات داده شده، برای استخراج فلز پتاسیم از ساختار پتاسیم کربنات، باید از یک فلز واکنش‌پذیرتر از پتاسیم مثل روبیدیم یا سزیم استفاده کنیم چراکه فلز روی نسبت به پتاسیم واکنش‌پذیری کمتری دارد. در رابطه با تیتانیوم (IV) کلرید با فرمول شیمیایی $TiCl_4$ نیز توجه داریم که آرایش الکترونی کاتیون Ti^{4+} به زیرلایه $3p^6$ ختم می‌شود.



۸۲- با توجه به شکل مقابل که واکنش دو فلز از گروه دوم و یک فلز از گروه دوازدهم جدول دوره‌ای را با هیدروکلریک اسید نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



- (A) فلز A، یک فلز واسطه بوده و خصلت فلزی آن از فلز B بیشتر است.
 (B) شعاع اتمی عنصر C از عنصر B بیشتر بوده و واکنش‌پذیری آن کمتر از A است.
 (C) تمایل عنصر C برای تبدیل شدن به کاتیون با بار $+2$ ، کمتر از تمایل دو عنصر دیگر است.
 (D) آرایش الکترونی فلز C به زیرلایه S ختم شده و شدت نور حاصل از واکنش آن با کلر، بیشتر از واکنش فلز B است.

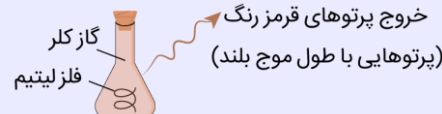
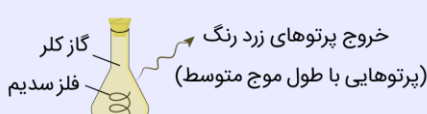
پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۶ - صفحه ۱۲ - ۱۱۰۱)

از آنجا که خصلت فلزی فلزهای قلیایی خاکی از فلزهای واسطه بیشتر است و با توجه به افزایش شدت واکنش از A تا C، می‌توان گفت که A فلز واسطه و B و C هر دو فلز قلیایی خاکی هستند. توجه داریم که خصلت فلزی عنصر C نسبت به B بیشتر است. بر این اساس، شدت نور حاصل از واکنش فلز C با گاز کلر (Cl_2) نسبت به فلز B بیشتر خواهد بود. همان‌طور که گفتیم، فلز C یک فلز قلیایی خاکی بوده و آرایش الکترونی آن به زیرلایه ns^2 ختم می‌شود.

واکنش فلزها با کلر

گاز کلر که خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی دارد، از مولکول‌های دو اتمی Cl_2 تشکیل شده است. تصاویر زیر، نمایی از واکنش میان فلزهای لیتیم، سدیم و پتاسیم با گاز کلر (Cl_2) را نشان می‌دهد:



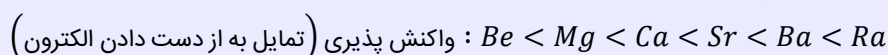
از آنجا که پرتوهای نور خارج شده از ظرف محتوی پتاسیم در مقایسه با پرتوهای خارج شده از سایر ظرف‌ها طول موج کوتاه‌تر و انرژی بیشتری دارند، پس می‌توان گفت شدت نور خارج شده از این ظرف در مقایسه با سایر ظرف‌ها بیشتر بوده و واکنش‌دهنده مصرف شده در این ظرف (فلز پتاسیم) نیز در مقایسه با واکنش‌دهنده مصرف شده در سایر ظرف‌ها فعالیت شیمیایی بیشتری دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) خصلت فلزی عناصر با مقدار واکنش‌پذیری آن‌ها و شدت واکنش آن‌ها با یک ماده خاص رابطه مستقیم دارد. بر این اساس، می‌توان گفت مقایسه خصلت فلزی این سه عنصر به صورت $A < B < C$ است.

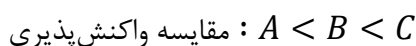
فلزهای قلیایی خاکی

در گروه دوم جدول دوره‌ای، عناصر برلییم (Be)، منیزیم (Mg)، کلسیم (Ca)، استرانسیم (Sr)، باریم (Ba) و رادیوم (Ra) وجود دارند. این عناصر، اصطلاحاً به فلزهای قلیایی خاکی معروف هستند. با افزایش عدد اتمی عناصر موجود در گروه فلزهای قلیایی خاکی، شعاع اتمی این عناصر افزایش یافته و به دنبال آن، واکنش‌پذیری این فلزها نیز بیشتر می‌شود. ترتیب واکنش‌پذیری این عناصر فلزی به صورت زیر است:



همان‌طور که گفتیم، منیزیم یک فلز از گروه فلزهای قلیایی خاکی است، در حالی که فلزهای قلیایی، نام دیگر عناصر فلزی موجود در گروه اول است.

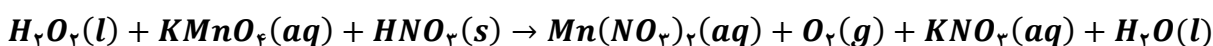
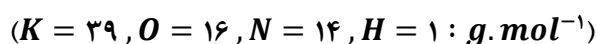
۲) در فلزهای قلیایی خاکی، با افزایش شعاع اتمی واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد؛ بنابراین شعاع اتمی عنصر C از عنصر B بیشتر است. همان‌طور که می‌دانیم، واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی خاکی از فلزهای واسطه بیشتر است. بنابراین داریم:



۳) عنصر C خصلت فلزی بیشتری نسبت به عناصر A و B دارد؛ بنابراین تمایل آن برای تبدیل شدن به کاتیون دو بار مثبت، نسبت به دو عنصر دیگر بیشتر است. توجه داریم که فلزهای گروه ۱۲ جدول تناوبی از جمله فلز روی، مشابه فلزهای قلیایی خاکی می‌توانند یون پایدار $+2$ ایجاد کنند.



۸۳- واکنش موازنه نشده زیر، در یک محلول آبی و با استفاده از نمونه‌های هیدروژن پراکسید و نیتریک اسید که درصد خلوص آن‌ها به ترتیب برابر با ۵۰٪ و ۲۰٪ است، انجام می‌شود. اگر تفاوت جرم هیدروژن پراکسید و نیتریک اسید مصرف شده برابر با ۳۱ گرم باشد، در این واکنش چند میلی‌لیتر گاز اکسیژن در شرایط استاندارد تولید خواهد شد؟



۲۲۴۰ (۴)

۱۱۲۰ (۳)

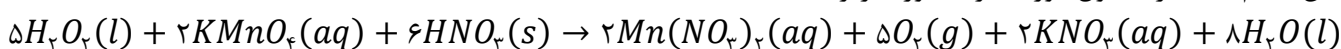
۱۶۸۰ (۲)

۸۴۰ (۱)

سخت - مسئله - زمان‌بر (صفحه ۲۴ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش انجام شده در محلول مورد نظر به صورت زیر است:



به ازای مصرف ۵ مول هیدروژن پراکسید (آب اکسیژنه) در این واکنش شیمیایی، ۶ مول نیتریک اسید مصرف می‌شود. جرم مولی این دو ترکیب مطابق با جدول زیر است:

ماده	HNO_3	H_2O_2
جرم مولی	۶۳	۳۴

طبق فرض سؤال، این واکنش با استفاده از نمونه‌های هیدروژن پراکسید و نیتریک اسید که درصد خلوص آن‌ها به ترتیب برابر با ۵۰٪ و ۲۰٪ است، در حال انجام شدن است. اگر این واکنش شیمیایی یک بار انجام شده و ۵ مول گاز اکسیژن در آن تولید شود، مقدار ۵ مول هیدروژن پراکسید (معادل با $170 = 34 \times 5$ گرم هیدروژن پراکسید خالص که معادل با ۳۴۰ گرم نمونه ناخالص از آن است) و ۶ مول نیتریک اسید (معادل با $378 = 63 \times 6$ گرم نیتریک اسید خالص که معادل با ۱۸۹۰ گرم نمونه ناخالص از آن است) مصرف می‌شود. بر این اساس، جرم نمونه‌های ناخالص مصرف شده در این واکنش به ازای یک بار انجام شدن آن، برابر است با:

$$g = 1890 - 340 = 1550 \text{ جرم هیدروژن پراکسید ناخالص} - \text{جرم نیتریک اسید ناخالص}$$

بر این اساس، مقدار گاز اکسیژن تولید شده در واکنش مورد نظر را در حالتی که تفاوت جرم واکنش دهنده‌ها برابر با ۳۱ گرم است، محاسبه می‌کنیم:

$$mL O_2 = 31 \text{ g} \times \frac{5 \text{ mol } O_2}{1550 \text{ g}} \times \frac{22.4 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{1000 \text{ mL } O_2}{1 \text{ L } O_2} = 2240 \text{ mL}$$



۸۴- یک نمونه از گاز اکسیژن، در شرایط استاندارد ۱۳۴۴۰ میلی لیتر حجم دارد. اگر ۵/۸ گرم گاز آرگون را با این نمونه اکسیژن مخلوط کنیم، درصد خلوص گاز اکسیژن در نمونه مورد نظر چقدر می‌شود؟ ($O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۷۶/۸ (۴)

۷۲/۴ (۳)

۸۱/۶ (۲)

۶۸/۴ (۱)

(آسان - مسئله - سریع) - صفحه ۲۴ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

واکنش دهنده‌های مصرف شده در صنعت و آزمایشگاه کاملاً خالص نبوده و علاوه بر ماده اصلی، شامل مواد دیگر نیز می‌شوند. برای بیان میزان خلوص بودن این مواد، از درصد خلوص استفاده می‌شود. درصد خلوص هر ماده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص (g)}}{\text{جرم کل (g)}} \times 100$$

اگر چند نمونه ناخالص از یک ماده را مخلوط کنیم، درصد خلوص مخلوط نهایی به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\text{درصد خلوص نهایی} = \frac{(\text{درصد خلوص نمونه اول} \times \text{جرم نمونه اول}) + (\text{درصد خلوص نمونه دوم} \times \text{جرم نمونه دوم}) + \dots}{\text{جرم نمونه اول} + \text{جرم نمونه دوم} + \dots}$$

با توجه به حجم اولیه گاز اکسیژن، مقدار جرم این ماده را محاسبه می‌کنیم:

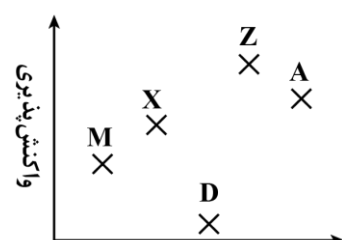
$$g O_2 = 13440 \text{ mL } O_2 \times \frac{1 \text{ L } O_2}{1000 \text{ mL } O_2} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{22.4 \text{ L } O_2} \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 19/2 \text{ g}$$

طی این فرایند، ۵/۸ گرم آرگون به عنوان ناخالصی به نمونه اکسیژن اضافه شده و جرم نمونه به $19/2 + 5/8 = 25$ گرم رسیده است. بر این اساس، درصد خلوص گاز اکسیژن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{19/2 \text{ g } O_2}{25 \text{ g}} \times 100 = 76/8$$



۸۵- نمودار مقابل، مقایسه واکنش پذیری پنج عنصر متوالی از تناوب دوم را به صورت نامرتب نشان می‌دهد. از میان این عناصر، بزرگ‌ترین شعاع اتمی مربوط به کدام عنصر بوده و فرمول شیمیایی ترکیب حاصل از واکنش گاز کلر با عنصر X به چه صورت خواهد بود؟



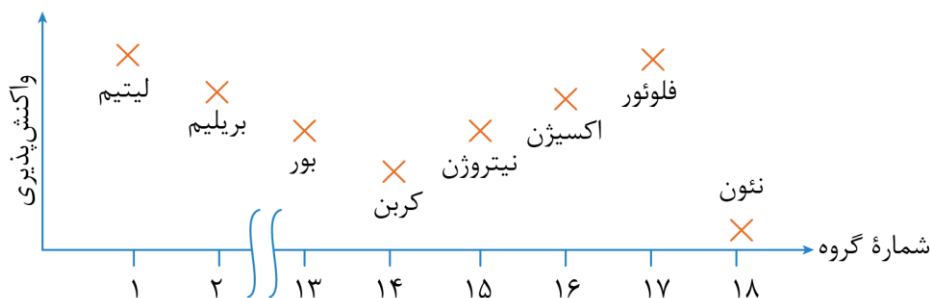
(۱) $XCl_3 - M$

(۲) $XCl_3 - M$

(۳) $XCl_3 - Z$

(۴) $XCl_3 - Z$

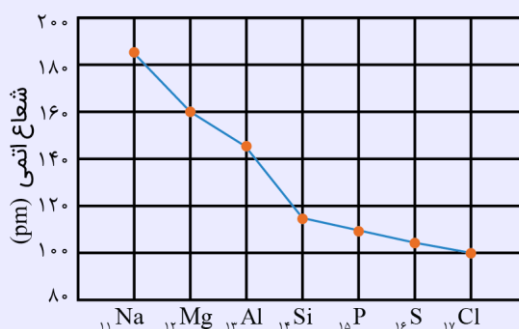
اگر فقط عناصر اصلی (عناصر دسته‌های s و p) را در نظر بگیریم، در هر تناوب با حرکت از سمت چپ به راست، ابتدا از خاصیت فلزی عناصر کاسته شده و واکنش‌پذیری آن‌ها کاسته می‌شود. این روند تا گروه ۱۴ هر تناوب ادامه پیدا می‌کند اما پس از آن، خاصیت نافلزی عناصر افزایش پیدا کرده و واکنش‌پذیری آن‌ها نیز مجدداً افزایش پیدا می‌کند تا نهایتاً به گروه ۱۷ از هر تناوب برسیم. توجه داریم که در آخرین خانه هر تناوب (گروه ۱۸) نیز یک گاز نجیب با واکنش‌پذیری اندک وجود دارد. به عنوان مثال، نمودار زیر روند کلی تغییر واکنش‌پذیری عنصرهای تناوب دوم جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، گاز نئون در مقایسه با سایر عناصر موجود در این تناوب واکنش‌پذیری بسیار کمتری دارد. بر این اساس، می‌توان گفت عنصر D معادل با نئون بوده و عنصر M نیز معادل با کربن است. چون این ۵ عنصر همگی متعلق به تناوب دوم بوده و متوالی هستند، پس می‌توان گفت عناصر A ، X و Z ، معادل با عناصر اکسیژن، نیتروژن و فلوئور هستند.

روند تغییر شعاع اتمی عناصر

یکی از روندهای تناوبی در جدول دوره‌ای، تغییر شعاع اتمی عناصر مختلف است. در جدول دوره‌ای، شعاع اتمی در یک گروه از بالا به پایین افزایش می‌یابد، چون تعداد لایه‌های الکترونی بیشتر می‌شوند، در حالی که شعاع اتمی در طول یک تناوب از چپ به راست کاهش می‌یابد؛ زیرا با اینکه تعداد لایه‌های الکترونی ثابت می‌ماند اما تعداد پروتون‌های هسته افزایش می‌یابد. با افزایش تعداد پروتون‌ها، نیروی جاذبه‌ای که هسته به الکترون‌ها وارد می‌کند افزایش یافته و بدین ترتیب، شعاع اتمی کاهش می‌یابد. برای مثال، نمودار تغییر شعاع اتمی در دوره سوم جدول دوره‌ای به صورت زیر است:



در میان عناصر کربن تا نئون از تناوب دوم، عنصر کربن در سمت چپ سایر عناصر قرار داشته و بزرگ‌ترین شعاع اتمی را دارد. چون نیتروژن در آرایش الکترون-نقطه‌ای خود دارای ۳ الکترون تک است، پس می‌توان گفت از واکنش گاز کلر با نیتروژن نیز ترکیب مولکولی با فرمول شیمیایی NCl_3 و با نام نیتروژن تری کلرید به دست می‌آید.



۸۶- کدام موارد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف - قلع رسانایی گرمایی بالایی داشته و شعاع اتمی آن بزرگ‌تر از شعاع اتمی‌های سرب است.
 ب - همه عناصر موجود در گروه ۱۴، در مقایسه با عنصری با عدد اتمی ۵۳، رسانایی الکتریکی بیشتری دارند.
 ج - فقط یکی از عناصر موجود در تناوب دوم، در مقایسه با عناصر قبل و بعد از خود واکنش‌پذیری کمتری دارد.
 د - در سال‌های اخیر، میزان تولید و مصرف مواد معدنی در مقایسه با میزان تولید و مصرف فلزها بیشتر بوده است.
- (۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «د» (۳) «الف» و «ج» (۴) «ب» و «ج»

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) قلع، یک عنصر فلزی است و رسانایی گرمایی بالایی دارد. این عنصر، در خانه بالایی سرب قرار گرفته و با توجه به شمار لایه‌های الکترونی کمتر آن، می‌توان گفت شعاع اتمی قلع کمتر از سرب است. به‌طور کلی، در یک گروه از جدول دوره‌ای، با حرکت از بالا به پایین، شمار لایه‌های الکترونی موجود در اطراف هسته اتم‌ها افزایش یافته و به دنبال آن، شعاع اتمی این عناصر نیز افزایش پیدا می‌کند.

ب) جدول زیر، ویژگی عناصر موجود در گروه ۱۴ را نشان می‌دهد:

نام عنصر	شماره تناوب	آرایش الکترونی	رسانایی الکتریکی	رسانایی گرمایی	سطح صیقلی	چکش‌خواری	تمایل به دادن، گرفتن یا اشتراک الکترون
کربن یا گرافیت (C)	۲	$[\text{He}]2s^2 2p^2$	دارد	ندارد	ندارد	ندارد	اشتراک
سیلیسیم (Si)	۳	$[\text{Ne}]3s^2 3p^2$	دارد	دارد	دارد	ندارد	اشتراک
ژرمانیم (Ge)	۴	$[\text{Ar}]3d^{10} 4s^2 4p^2$	دارد	دارد	دارد	ندارد	اشتراک
قلع (Sn)	۵	-	دارد	دارد	دارد	دارد	الکترون می‌دهد
سرب (Pb)	۶	-	دارد	دارد	دارد	دارد	الکترون می‌دهد

همه عناصر موجود در گروه ۱۴، حالت جامد داشته و توانایی عبور دادن جریان الکتریسیته را دارند. عنصری با عدد اتمی ۵۳، معادل با ید است. ید یک عنصر نافلزی جامد بوده و رسانای جریان الکتریسیته نیست. البته، توجه داریم که عنصر سیلیسیم و ژرمانیم رسانایی الکتریکی بالایی نداشته و جریان برق را به مقدار کمی از خود عبور می‌دهند.

خواص عناصر

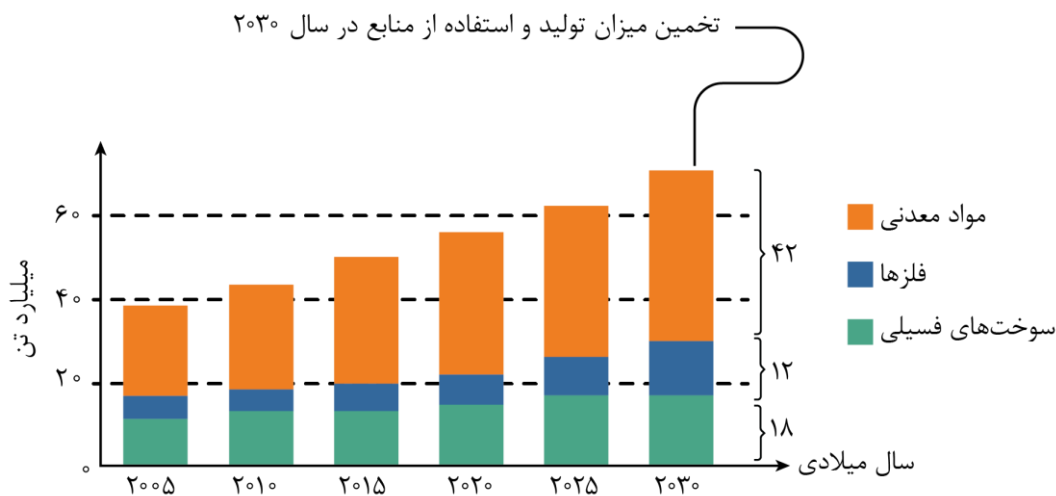
ویژگی‌های عناصر موجود در جدول تناوبی مطابق با نمودار زیر، در دو گروه خواص فیزیکی و خواص شیمیایی قرار می‌گیرد:



با توجه به نمودار بالا، داشتن جلا، رسانایی گرمایی و قابلیت ورقه و مفتول شدن، از جمله خواص فیزیکی فلزها به شمار می‌روند. این ویژگی‌ها، اغلب به خواص ظاهری فلزها اشاره دارد.

ج) کربن با عدد اتمی ۶، همانند نئون، یک عنصر نافلزی بوده و متعلق به تناوب دوم است. این عنصر، همانند نئون، در مقایسه با عناصر قبل و بعد از خود، واکنش‌پذیری کمتری دارد.

در سال‌های اخیر، میزان تولید و مصرف مواد معدنی در مقایسه با میزان تولید و مصرف فلزها بیشتر بوده است. نمودار زیر، میزان استفاده از مواد و منابع مختلف را در طول سال‌های اخیر نشان می‌دهد:



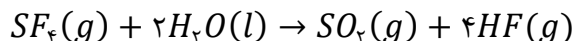
۸۷- واکنش $SF_6(g) + 2H_2O(l) \rightarrow SO_2(g) + 4HF(g)$ با مصرف شدن ۶۰ گرم گاز SF_6 با خلوص ۹۰٪ انجام شده و طی این فرایند، ۱۲ گرم گاز هیدروژن فلوئورید تولید شده است. بازده درصدی واکنش انجام شده چقدر بوده و در این فرایند، چند لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید با حجم مولی ۳۰ لیتر، تولید می‌شود؟ ($S = 32, F = 19, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۹ - ۳۰ (۴) ۴/۵ - ۳۰ (۳) ۹ - ۱۵ (۲) ۴/۵ - ۱۵ (۱)

(متوسط - مسئله - استاندارد ۳ - صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، مقدار نظری گاز هیدروژن فلوئورید تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? g HF = 60 g SF_6 \times \frac{90 g SF_6}{100 g SF_6} \times \frac{1 mol SF_6}{108 g SF_6} \times \frac{4 mol HF}{1 mol SF_6} \times \frac{20 g HF}{1 mol HF} = 40 g$$

مقدار عملی گاز هیدروژن فلوئورید تولید شده، برابر با ۱۲ گرم است. بر این اساس، داریم:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{12}{40} \times 100 = 30 \text{ درصد}$$

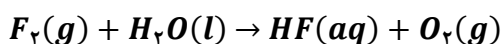
با توجه به معادله واکنش مورد نظر، حجم گاز SO_2 تولید شده را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$? L SO_2 = 12 g HF \times \frac{1 mol HF}{20 g HF} \times \frac{1 mol SO_2}{4 mol HF} \times \frac{30 L SO_2}{1 mol SO_2} = 4.5 L$$



۸۸- در یک واحد صنعتی، در هر ثانیه ۵۷۰ گرم آب وارد مخزنی از گاز فلوئور می‌شود. اگر بازده این فرایند برابر با ۷۵ درصد باشد، تولید هیدروفلوئوریک اسید در این واحد، برابر با چند تن در هر ساعت است؟

(معادله واکنش موازنه شود. $F = 19, O = 16, H = 1 : g.mol^{-1}$)



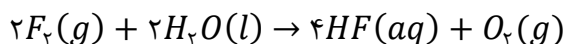
۶/۸۴ (۴)

۳/۴۲ (۳)

۵/۱۳ (۲)

۱۰/۲۶ (۱)

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله موازنه شده این واکنش، مقدار HF تولید شده در هر ثانیه را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{عملی } 75 \text{ ton HF} &= 570 \text{ g } H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{4 \text{ mol HF}}{2 \text{ mol } H_2O} \times \frac{20 \text{ g HF}}{1 \text{ mol HF}} \times \frac{1 \text{ ton HF}}{10^6 \text{ g HF}} \\ \text{نظری } 100 \text{ ton HF} &= 9/5 \times 10^{-4} \text{ ton} \end{aligned}$$

توجه داریم که بازده این واکنش برابر با ۷۵٪ بوده و مقدار عملی هیدروفلوئوریک اسید تولید شده کمتر از مقدار نظری آن است. در صورت سؤال، مقدار هیدروفلوئوریک اسید تولید شده در هر ساعت از ما خواسته شده است. هر ساعت معادل ۳۶۰۰ ثانیه است، پس در هر ساعت $3/42 = 3600 \times 9/5 \times 10^{-4}$ تن هیدروفلوئوریک اسید تولید می‌شود.



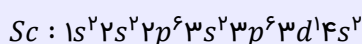
۸۹- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- (۱) عنصری از گروه ۱۷ که دارای کوچک‌ترین شعاع اتمی است، در دمای اتاق به سرعت با گاز H_2 واکنش می‌دهد.
- (۲) جدول ژانت شامل ۵ دسته s, p, d, f و g شده و همانند جدول دوره‌ای امروزی، با مدل کوانتومی هم‌خوانی دارد.
- (۳) اولین فلز واسطه، نسبت به پتاسیم شعاع بزرگ‌تری داشته و یکی از خواص فیزیکی آن، داشتن رسانایی گرمایی است.
- (۴) هر عنصر جامد از جدول دوره‌ای که در واکنش با نافلزها الکترون به اشتراکی می‌گذارد، در اثر ضربه چکش خرد می‌شود.

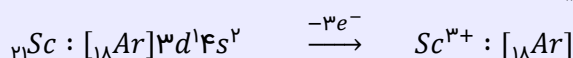
در یک تناوب از جدول دوره‌ای، با حرکت از چپ به راست، شمار پروتون‌ها و بار الکتریکی هسته اتم‌ها افزایش پیدا می‌کند درحالی که شمار لایه‌های الکترونی موجود در اطراف هسته ثابت باقی می‌ماند. در چنین شرایطی، الکترون‌های سطحی با قدرت بیشتری توسط هسته جذب شده و شعاع اتمی کاهش پیدا می‌کند. اولین فلز واسطه موجود در جدول دوره‌ای، اسکاندیم با عدد اتمی ۲۱ است. این عنصر، در سمت راست عنصر پتاسیم قرار گرفته و به همین خاطر، در مقایسه با پتاسیم شعاع اتمی کوچک‌تری دارد.

اسکاندیم

اسکاندیم (Sc)، متعلق به گروه ۳ از تناوب چهارم بوده و نخستین فلز واسطه موجود در جدول دوره‌ای است. این ماده در برخی وسایل مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد. آرایش الکترونی اسکاندیم به صورت زیر است:



این فلز با از دست دادن ۳ الکترون، به آرایش گاز نجیب آرگون می‌رسد. به فرایند زیر توجه کنید:



بررسی سایر گزینه‌ها:

فلوئور، در صدر گروه ۱۷ (گروه هالوژن‌ها) قرار داشته و نسبت به سایر عناصر موجود در این گروه، شعاع کوچک‌تری دارد. این عنصر واکنش‌پذیری بسیار بالایی داشته و حتی در دمای $-200^\circ C$ هم با گاز هیدروژن به سرعت واکنش می‌دهد. با افزایش عدد اتمی هالوژن‌ها، واکنش‌پذیری این مواد کاهش یافته و بر این اساس، سرعت واکنش این مواد با گاز هیدروژن نیز کمتر می‌شود.

جدول زیر، برخی از خواص هالوژن‌ها را نشان می‌دهد:

خواص	واکنش با گاز هیدروژن	حالت فیزیکی در دمای اتاق	تعداد الکترون ظرفیتی	شعاع اتمی (نانومتر)
فلوئور	حتی در دمای $200^\circ C$ - هم به سرعت واکنش می‌دهد	گاز	۷	۷۱
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد	گاز	۷	۹۹
برم	در دمای $200^\circ C$ واکنش می‌دهد	مایع	۷	۱۱۴
ید	در دمای بالاتر از $400^\circ C$ واکنش می‌دهد	جامد	۷	۱۲۷

جدول ژانت در ساختار خود شامل ۵ دسته عنصر s, p, d, f و g شده و همانند جدول دوره‌ای امروزی، با مدل کوانتومی همخوانی دارد. زیرلایه g ، پنجمین زیرلایه‌ای است که الکترون‌ها می‌توانند در آن قرار بگیرند. عدد کوانتومی فرعی برای این لایه برابر با ۴ بوده و در ساختار این زیرلایه، حداکثر ۱۸ الکترون قرار می‌گیرد.

جدول ژانت

همه ۱۱۸ عنصر جدول دوره‌ای بر اساس افزایش عدد اتمی در ۷ دوره و ۱۸ گروه در کنار یکدیگر چیده شده‌اند؛ به‌طوری‌که هیچ خانه‌ای از این جدول خالی نیست. در این شرایط، شناسایی و ساخت عنصرهایی با عدد اتمی بزرگ‌تر از ۱۱۸ سبب ارائه طبقه‌بندی‌های تازه‌ای از عناصر خواهد شد؛ چراکه در جدول دوره‌ای امروزی، جایی برای این عناصر جدید پیش‌بینی نشده است. آقای شارل ژانت، یکی از افرادی بود که با ارائه یک الگوی جدید، توانست عناصری که عدد اتمی بزرگ‌تر از ۱۱۸ دارند را نیز طبقه‌بندی کند. توجه داریم که جدول ژانت از مدل کوانتومی اتم‌ها پیروی کرده و شمار تناوب‌های موجود در آن بیشتر از ۷ عدد است. جدول پیشنهادی ژانت می‌تواند بیشتر از ۱۱۸ عنصر را در خود جای دهد. این جدول بر اساس زیرلایه الکترونی در حال پرشدن، عناصر را دسته‌بندی می‌کند. عناصر دسته s در این جدول در سمت راست و در ۲ گروه جای گرفته‌اند. عناصر دسته p ، از دوره سوم جدول شروع می‌شوند. در این جدول در صورت کشف عناصری با اعداد اتمی بالاتر از ۱۲۰، زیرلایه g شروع به پرشدن می‌کند.

فلزها در واکنش با نافلزها الکترون از دست داده و به کاتیون تبدیل می‌شوند، اما نافلزها و شبه‌فلزها در واکنش با نافلزها الکترون به اشتراک گذاشته و ترکیب‌های مولکولی و یا کووالانسی را ایجاد می‌کنند. همان‌طور که می‌دانیم، نافلزها و شبه‌فلزها در حالت جامد چکش‌خوار نبوده و در اثر اصابت ضربه خرد می‌شوند. به عبارت دیگر، این عناصر شکننده هستند.



۹۰- کدام موارد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف - در تناوب سوم جدول دوره‌ای، بیشترین تفاوت شعاع اتمی دو عنصر متوالی مربوط به عناصر Al و Si است.
- ب - فقط دو مورد از عناصر موجود در تناوب چهارم، دارای ۵ زیرلایه ۲ الکترونی در آرایش الکترونی خود هستند.
- ج - محلول حاصل از واکنش فلز آهن با محلول HCl ، در واکنش با محلول $NaOH$ رسوب قرمز رنگ تولید می‌کند.
- د - برای استخراج فلزهای قلیایی از نمک کلرید آن‌ها، می‌توان از فلز قلیایی خاکی هم‌دوره با فلز مورد نظر استفاده کرد.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «الف» و «د» (۴) «ج» و «د»

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۶ - صفحه ۲۱ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

عبارتهای (الف) و (ب) درست هستند.

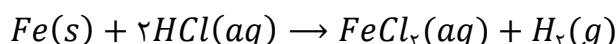
بررسی موارد:

الف) در میان عناصر دوره سوم تفاوت شعاع Si و Al بیشتر از تفاوت شعاع اتمی سایر عناصر متوالی دوره سوم است. مطابق نمودار داده شده در کتاب درسی، تفاوت شعاع اتمی دو عنصر متوالی در دوره سوم به‌صورت زیر است:



ب) عناصر تیتانیوم و ژرمانیم با عدد اتمی ۲۲ و ۳۲، عناصری از تناوب چهارم هستند که به‌جز چهار زیرلایه دو الکترونی s ، دارای یک زیرلایه دو الکترونی دیگر هم هستند. در اتم تیتانیوم، یک زیرلایه d^2 و در اتم ژرمانیم نیز یک زیرلایه p^2 وجود دارد.

ج) واکنش فلز آهن با محلول HCl به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:



از محلول $NaOH$ می‌توان برای تشخیص نوع کاتیون آهن موجود در یک محلول استفاده کرد؛ به گونه‌ای که محلول $NaOH$ واکنش با محلول آهن(II) (کلرید که حاوی یون Fe^{2+} است، رسوب سبز رنگ $Fe(OH)_2$ و در واکنش با محلول آهن(III) (کلرید که حاوی یون Fe^{3+} است، رسوب قرمز یا آجری رنگ $Fe(OH)_3$ را تولید می‌کند.

رسوب حاصل از کاتیون‌های آهن

کاتیون‌های مختلف آهن، در حالت محلول در آب و یا در حالت رسوبی، رنگ‌های متفاوتی دارند. از واکنش یون Fe^{2+} با محلول سدیم هیدروکسید، رسوب سبز رنگ آهن(II) هیدروکسید تشکیل می‌شود. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:



رسوب سبز رنگ

از واکنش یون آهن موجود در زنگ آهن یعنی Fe^{3+} با محلول سود، رسوب قهوه‌ای رنگ آهن (III) هیدروکسید تولید می‌شود. در این رابطه داریم:

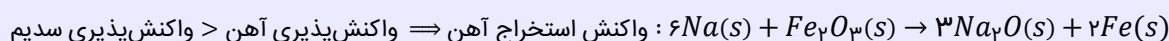
$$FeCl_3(aq) + 3NaOH(aq) \rightarrow Fe(OH)_3(s) + 3NaCl(aq)$$

رسوب قهوه‌ای رنگ

واکنش‌پذیری هر فلز، تمایل اتم‌های سازنده آن فلز به انجام واکنش شیمیایی را نشان می‌دهد. در واقع، هرچه فلز مورد نظر واکنش‌پذیرتر باشد، تمایل اتم‌های آن فلز برای انجام واکنش شیمیایی بیشتر است. برای استخراج فلزها از ترکیبات یونی حاوی آن عنصر فلزی، ترکیب مورد نظر با فلزی که واکنش‌پذیری بیشتری دارد، واکنش داده و فلز مورد نظر را از ترکیب خارج می‌کنند. واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی خاکی از فلزهای قلیایی کمتر بوده و نمی‌توانند فلزهای قلیایی را از ترکیب‌های یونی خارج کنند.

واکنش‌های خودبه‌خودی

به‌طور کلی، در هر واکنش شیمیایی که به‌صورت طبیعی و خودبه‌خودی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها کمتر است. بر اساس این قاعده، با استفاده از عناصر فلزی واکنش‌پذیرتر می‌توانیم سایر عناصر فلزی را از ترکیبات حاوی آن‌ها خارج کنیم. به‌عنوان مثال، چون واکنش‌پذیری فلز سدیم در مقایسه با واکنش‌پذیری فلز آهن بیشتر است، با استفاده از فلز سدیم می‌توانیم فلز آهن را بر اساس واکنش خودبه‌خودی زیر از آهن (III) اکسید خارج کنیم. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:



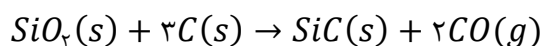
۹۱- با شرکت ۴۸ گرم SiO_2 ناخالص در واکنش $SiO_2(s) + 3C(s) \rightarrow SiC(s) + 2CO(g)$ ، ۴/۴۸ لیتر گاز کربن مونوکسید در شرایط استاندارد تولید شده است. درصد ناخالصی در این نمونه از SiO_2 چقدر بوده و جرم اتم‌های کربن موجود در SiC تولید شده با جرم اتم‌های کربن موجود در چند گرم اتانول برابر است؟ ($Si = 28, O = 16, C = 12, H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) $4/6 - 87/5$ (۲) $4/6 - 12/5$ (۳) $2/3 - 87/5$ (۴) $2/3 - 12/5$

(سخت - مسئله - استاندارد ۳ - صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، جرم سیلیسیم دی‌اکسید مصرف شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? g SiO_2 = 4/48 L CO \times \frac{1 mol CO}{22/4 L CO} \times \frac{1 mol SiO_2}{2 mol CO} \times \frac{60 g SiO_2}{1 mol SiO_2} = 6 g$$

جرم نمونه اولیه سیلیسیم دی‌اکسید (SiO_2) برابر با ۴۸ گرم بوده است، پس می‌توان گفت در این نمونه ۶ گرم SiO_2 و ۴۲ گرم ناخالصی وجود داشته است. بر این اساس، در رابطه با ناخالصی موجود در این نمونه ماده داریم:

$$\text{درصد ناخالصی} = \frac{\text{جرم ناخالصی}}{\text{جرم کل}} \times 100 = \frac{42}{48} \times 100 = 87/5$$

در قدم بعد، شمار مول اتم‌های کربن موجود در SiC تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? mol C = 4/48 L CO \times \frac{1 mol CO}{22/4 L CO} \times \frac{1 mol SiC}{2 mol CO} \times \frac{1 mol C}{1 mol SiC} = 0/1 mol$$

در قدم بعد، جرمی از اتانول (C_2H_5OH) که حاوی ۰/۱ مول اتم کربن باشد را محاسبه می‌کنیم.

$$? g C_2H_5OH = 0/1 mol C \times \frac{1 mol C_2H_5OH}{2 mol C} \times \frac{46 g C_2H_5OH}{1 mol C_2H_5OH} = 2/3 g$$

اتانول

- ✓ اتانول، الکی دوکربنه، بی‌رنگ، سیرشده و فرار است. این ماده در دمای ۷۸ درجه سانتی‌گراد، به جوش آمده و تبخیر می‌شود.
- ✓ جزء سوخت‌های سبز به شمار می‌رود و از تخمیر بی‌هوازی گلوکز نیز حاصل می‌شود. از واکنش گاز اتن با آب نیز قابل تولید است.
- ✓ ۸ پیوند اشتراکی و ۲ جفت الکترون ناپیوندی در ساختار خود دارد.
- ✓ مولکولی قطبی و حلالی صنعتی است که به هر نسبتی در آب حل می‌شود؛ بنابراین نمی‌توان محلول سیرشده‌ای از آن را در آب ایجاد کرد.
- ✓ در تهیه مواد دارویی، بهداشتی و آرایشی کاربرد دارد و در بیمارستان‌ها به‌عنوان ضدعفونی‌کننده استفاده می‌شود.

۹۲- برای تولید ۱۶۰ گرم محلول اتانول با درصد جرمی ۵/۸۰٪ طی واکنش تخمیر بی‌هوازی گلوکز، به چند گرم گلوکز با خلوص ۷۲٪ نیاز بوده و فراورده گازی حاصل از این فرایند را بر اثر سوزاندن کامل چند مول بوتانوئیک اسید می‌توان به‌دست آورد؟

($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

(۴) ۳۵۰ - ۰/۷

(۳) ۳۵۰ - ۰/۶

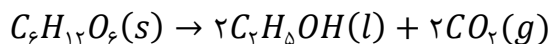
(۲) ۲۷۰ - ۰/۷

(۱) ۲۷۰ - ۰/۶

(سخت - مسئله - زمان‌بر) - صفحه ۲۴ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش شیمیایی، ابتدا شمار مول‌های اتانول مورد نیاز و شمار مول‌های CO_2 تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? mol C_2H_5OH = 160 g C_2H_5OH \text{ محلول} \times \frac{180/5 g C_2H_5OH}{100 g C_2H_5OH \text{ محلول}} \times \frac{1 mol C_2H_5OH}{46 g C_2H_5OH} = 2/8 mol$$

$$? mol CO_2 = 160 g C_2H_5OH \text{ محلول} \times \frac{180/5 g C_2H_5OH}{100 g C_2H_5OH \text{ محلول}} \times \frac{1 mol C_2H_5OH}{46 g C_2H_5OH} \times \frac{2 mol CO_2}{2 mol C_2H_5OH} = 2/8 mol$$

در مرحله بعد، جرم گلوکز ناخالص را محاسبه می‌کنیم.

$$? g C_6H_{12}O_6 \text{ ناخالص} = 2/8 mol C_2H_5OH \times \frac{1 mol C_6H_{12}O_6}{2 mol C_2H_5OH} \times \frac{180 g C_6H_{12}O_6}{1 mol C_6H_{12}O_6} \times \frac{100 g C_6H_{12}O_6}{72 g C_6H_{12}O_6 \text{ ناخالص}} = 350 g$$

بنابراین، جرم گلوکز ناخالص مورد نیاز برابر ۳۵۰ گرم است. در این واکنش، مقدار ۲/۸ مول گاز کربن دی‌اکسید تولید شده است. بوتانوئیک اسید با فرمول شیمیایی $C_4H_8O_2$ ، یک اسید ۴ کربنه است که بر اثر سوختن هر مول از آن، ۴ مول گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت برای تولید ۲/۸ مول گاز CO_2 ، به ۰/۷ مول بوتانوئیک اسید نیاز است.



۹۳- کدام یک از مطالب زیر، درست است؟

- (۱) واکنش‌پذیری فلز سدیم در مقایسه با فلز سزیم کمتر بوده و در واکنش این فلز با گاز کلر، نور قرمز رنگ گسیل می‌شود.
- (۲) فرمول ترکیب حاصل از واکنش نافلز مایع دوره ۴ با فلزی از دوره سوم با کمترین خاصیت فلزی، به‌صورت MX_3 است.
- (۳) از آلومینیم مذاب تولید شده در واکنش ترمیت برای جوش دادن قطعات موجود در خطوط ریلی استفاده می‌شود.
- (۴) طلا خاصیت چکش‌خواری زیادی داشته و تنها فلزی است که به شکل آزاد در طبیعت یافت می‌شود.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

نافلز مایع دوره چهارم، معادل با برم (Br_2) بوده و فلز با کمترین خاصیت فلزی از دوره سوم نیز معادل با آلومینیم (Al) است. فرمول ترکیب حاصل از واکنش این دو ماده با یکدیگر، به‌صورت $AlBr_3$ است.

هالوژن‌ها

در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای، عناصر فلوئور (F)، کلر (Cl)، برم (Br) و ید (I) قرار دارند. این عناصر اصطلاحاً به هالوژن‌ها معروف هستند. با افزایش عدد اتمی هالوژن‌ها، شعاع اتمی این عناصر افزایش یافته و به دنبال آن، واکنش‌پذیری این عناصر نافلزی کمتر می‌شود. ترتیب واکنش‌پذیری هالوژن‌ها به‌صورت زیر است:

(تمایل به گرفتن الکترون) : $I < Br < Cl < F$: واکنش‌پذیری

همان‌طور که مشخص است، با افزایش عدد اتمی هالوژن‌ها، از فعالیت شیمیایی این عناصر کاسته شده و دمای مورد نیاز برای آغاز واکنش میان این عناصر با گاز هیدروژن افزایش پیدا می‌کند. آرایش الکترونی هالوژن‌ها به زیرلایه $ns^2 np^5$ ختم می‌شود. اتم‌های سازنده این عناصر با گرفتن یک الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب بعد از خود رسیده و یون پایدار X^- را تولید می‌کنند. از میان هالوژن‌ها، فلوئور دارای بیشترین خاصیت نافلزی بوده و نسبت به سایر عناصر، الکترون‌ها را با قدرت بیشتری به سمت خود جذب می‌کند. هالوژن‌ها در حالت آزاد به شکل مولکول‌های دو اتمی دیده می‌شوند. فلوئور (F_2) و کلر (Cl_2) در دمای اتاق به حالت گاز هستند درحالی که برم (Br_2) و ید (I_2) در دمای اتاق به‌ترتیب به حالت مایع و جامد یافت می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در یک گروه فلزی از بالا به پایین با افزایش خصلت فلزی، واکنش پذیری افزایش می‌یابد؛ پس واکنش پذیری سزیم بیشتر از سدیم است.



لیتیم

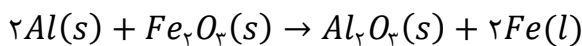
سدیم

پتاسیم

فلزهای قلیایی در واکنش با گاز کلر نور گسیل می‌کنند. در واکنش لیتیم، سدیم و پتاسیم با گاز کلر به ترتیب نور سرخ، زرد و بنفش تولید می‌شود. تصویر مقابل، نمایی از واکنش عناصر لیتیم، سدیم و پتاسیم با گاز کلر را نشان می‌دهد:

توجه داریم که تولید نور، آزادسازی گرما، تشکیل رسوب و خروج گاز، نشانه‌هایی از انجام تغییر شیمیایی هستند. هرچه شدت نور یا آهنگ خروج گاز آزاد شده بیشتر باشد، واکنش شیمیایی مورد نظر سریع‌تر و شدیدتر بوده و واکنش دهنده شرکت کننده در آن، فعالیت شیمیایی بیشتری دارد.

۲ در واکنش ترمیت، از واکنش فلز آلومینیم با اکسید آهن (Fe_2O_3)، آهن مذاب تولید می‌شود. از آهن (نه آلومینیم!) مذاب تولید شده در این واکنش، برای جوش دادن خطوط راه آهن استفاده می‌شود. معادله واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



توجه داریم که واکنش بالا به صورت طبیعی انجام می‌شود، پس می‌توان گفت واکنش پذیری آلومینیم از فلز آهن بیشتر است.

گیاه پالایی

یکی از روش‌های بیرون کشیدن فلزها از لابه‌لای خاک استفاده از گیاهان (گیاه پالایی) است. به این منظور در معدن یا خاک دارای فلز، گیاهانی را می‌کارند که می‌توانند آن فلز را جذب کنند؛ سپس گیاه را برداشت کرده، می‌سوزانند و از خاکستر حاصل از آن، فلز را جداسازی می‌کنند. درصد فلز روی در سنگ معدن بیشتر از درصد فلز روی در یک کیلوگرم گیاه است، لذا روش گیاه پالایی برای فلز روی مناسب نیست. از طرفی، درصد فلز نیکل در سنگ معدن کمتر از درصد فلز نیکل در یک کیلوگرم گیاه است، با این حال استخراج نیکل نیز با این روش به علت قیمت کم نیکل صرفه اقتصادی ندارد. درصد فلزهای مس و طلا در سنگ معدن کمتر از درصد این فلزها در یک کیلوگرم گیاه است و همچنین این دو فلز قیمت بالایی نیز دارند؛ به همین علت استفاده از گیاهان برای استخراج این دو فلز صرفه اقتصادی بیشتری نسبت به استخراج آن‌ها از سنگ معدن دارد.

۴ اغلب عنصرها در طبیعت به شکل ترکیب با سایر عناصر یافت می‌شوند. به عنوان مثال، اغلب فلزهای واسطه در طبیعت به شکل ترکیب‌های یونی همچون اکسیدها و کربنات‌ها وجود دارند. فلزهای کلسیم و سدیم نیز به ترتیب در قالب ترکیب‌های سفیدرنگ کلسیم کربنات و سدیم کلرید یافت می‌شوند. در این میان، برخی از عناصر نافلزی مانند اکسیژن (در قالب گاز O_2)، نیتروژن (در قالب گاز N_2) و گوگرد (در قالب کانی زرد رنگ S_8)، به شکل آزاد (عنصری) در طبیعت وجود دارند. وجود نمونه‌هایی از برخی فلزها مثل طلا، نقره، مس و پلاتین نیز در طبیعت گزارش شده است. البته، طلا تنها فلزی است که به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

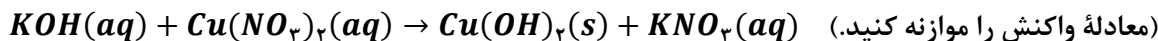
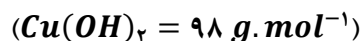
طلا

فلز طلا با نماد Au ، یکی از عناصر واسطه جدول دوره‌ای است. طلا، همانند پلاتین و نقره، از فلزهایی است که به حالت آزاد (به شکل عنصری و بدون ترکیب با سایر عناصر) در طبیعت یافت می‌شود. البته توجه داریم که در میان فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود. طلا فلزی ارزشمند و گران‌بها است که افزون بر داشتن ویژگی‌های مشترک با سایر فلزها، ویژگی‌های منحصر به فردی نیز دارد. ویژگی‌های طلا به شرح زیر هستند:



ویژگی‌های مناسب طلا سبب شده کاربردهای این فلز گسترش یافته و تقاضای جهانی آن روز به روز افزایش پیدا کند. به عنوان مثال، از فلز طلا برای ساختن لباس‌های فضانوردی استفاده می‌شود.

۹۴- اگر واکنش زیر با استفاده از محلول ۰/۱ مولار پتاسیم هیدروکسید با بازده ۸۰ درصد انجام شده و ۲ گرم مس (II) هیدروکسید با خلوص ۴۹ درصد تشکیل شود، در این واکنش چند میلی لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید مصرف شده است؟



۵۰۰ (۴)

۳۷۵ (۳)

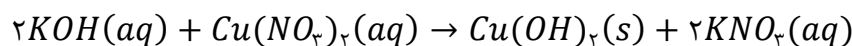
۲۵۰ (۲)

۱۲۵ (۱)

(متوسط - مسئله - استاندارد) - صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا واکنش داده شده را موازنه می کنیم:



در قدم اول، باید مقدار نظری مس (II) هیدروکسید تولید شده را محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\frac{\text{مقدار نظری}}{\text{مقدار عملی}} \times 100 \Rightarrow 80 = \frac{2 \text{ g } Cu(OH)_2}{x \text{ g } Cu(OH)_2} \times 100 \Rightarrow x = 2/5 \text{ g}$$

در این واکنش، ۲/۵ گرم $Cu(OH)_2$ ناخالص به صورت نظری تولید شده است. برای محاسبه حجم محلول پتاسیم هیدروکسید مصرف شده، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{محلول } mL = 2/5 \text{ g } Cu(OH)_2 \times \frac{1 \text{ mol } Cu(OH)_2}{98 \text{ g } Cu(OH)_2} \times \frac{2 \text{ mol } KOH}{1 \text{ mol } Cu(OH)_2} \\ \times \frac{1 \text{ L محلول}}{0/1 \text{ mol } KOH} \times \frac{1000 \text{ mL محلول}}{1 \text{ L محلول}} = 250 \text{ mL} \end{aligned}$$

به کمک روش تناسب نیز می توانیم مقدار محلول مصرف شده را محاسبه کنیم.

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{غلظت مولی} \times \text{حجم محلول}}{1000} \times \frac{Ra}{100} = \frac{P}{100} \Rightarrow \frac{98 \times 0/1 \times V}{2 \times 1000} \times \frac{80}{100} = \frac{2}{100}$$

$$\frac{0/1 \times V}{2 \times 1000} \times \frac{80}{100} = \frac{2 \times \frac{49}{100}}{1 \times 98} \Rightarrow V = \frac{2 \times 1000}{0/1 \times 80} = 250 \text{ mL}$$

آمار مسائل شیمی کنکور

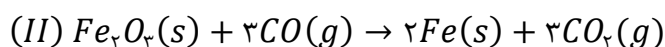
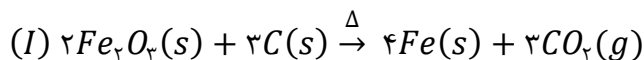
بچه ها حواستون باشه که در کنکور پارسال، تقریباً نیمی از سؤالات (حدود ۱۷ سؤال از ۳۵ سؤال) از حیطه مسائل شیمی طرح شده بودن. طبیعتاً بین این سؤالات، هم تعدادی سؤال آسان وجود داشت، هم تعدادی سؤال متوسط و هم تعدادی سؤال سخت! هر داوطلب کنکوری، باید یاد بگیره که سؤالات سخت کنکور رو پیدا کنه و این سؤالات رو رها کنه تا اگر آخر کار وقت اضافه آورد، بره سراغ این سؤالات و اون ها رو هم حل کنه! مطمئن باشید که اغلب سؤالات مسئله کنکور، درجه سختی بیش از حد بالایی ندارن و شما اگر در طول سال تحصیلی خوب تلاش کنید، قطعاً می تونید نتیجه خوبی بگیرید. در این آزمون ما، حدوداً ۴۰٪ از سؤالات شیمی از حیطه مسائل طراحی شده بودن که این مقدار، کمی کمتر از شرایط کنکور هست. در طول زمان و با نزدیک تر شدن به کنکور، سعی می کنیم نسبت مسائل در آزمون رو به کنکور نزدیک تر کنیم تا شرایط را خیلی بهتر برای شما شبیه سازی کنیم.



۹۵- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- (۱) مقدار عدد کوانتومی اصلی برای بیرونی ترین زیرلایه الکترونی همه عناصر واسطه تناوب چهارم، با هم برابر است.
- (۲) اولین عنصری که قاعده آفا در رسم آرایش الکترونی آن رعایت نمی شود، دارای ۵ الکترون با $n + l = 5$ است.
- (۳) اگر در استخراج آهن از Fe_2O_3 به جای گرافیت از CO استفاده شود، مقدار گاز گلخانه ای تولید شده کاهش می یابد.
- (۴) بین عناصر پتاسیم، مس و آهن، با افزایش عدد اتمی عناصر، تأمین شرایط مورد نیاز برای نگهداری فلز آسان تر می شود.

معادله دو واکنش انجام شده برای استخراج آهن از آهن (III) اکسید به صورت زیر است:



حالا حساب می‌کنیم که در هر واکنش، به ازای تولید یک مول Fe ، چند مول CO_2 آزاد می‌شود:

$$(I) \text{واکنش} \quad 1 \text{ mol Fe} \times \frac{3 \text{ mol CO}_2}{4 \text{ mol Fe}} = 0.75 \text{ mol}$$

$$(II) \text{واکنش} \quad 1 \text{ mol Fe} \times \frac{3 \text{ mol CO}_2}{2 \text{ mol Fe}} = 1.5 \text{ mol}$$

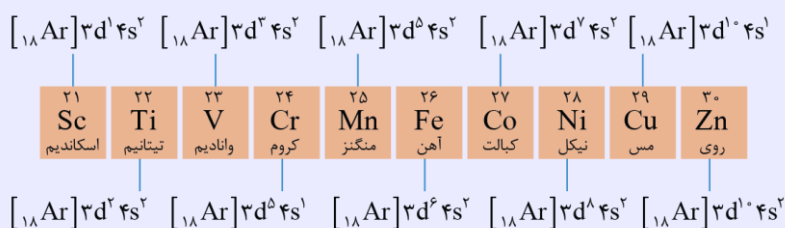
بنابراین در واکنش دوم، گاز گلخانه‌ای بیشتری آزاد شده است. به عبارت دیگر، می‌توان گفت در صورتی که در استخراج فلز آهن از Fe_2O_3 به جای کربن از گاز CO استفاده شود، میزان گاز گلخانه‌ای تولید شده افزایش خواهد یافت.

بررسی سایر گزینه‌ها:

عدد کوانتومی اصلی برای بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی همه عناصر واسطه تناوب چهارم با هم برابر است. در واقع، زیرلایه $4s$ بیرونی‌ترین زیرلایه موجود در همه اتم‌های عناصر واسطه تناوب چهارم را تشکیل می‌دهد.

عناصر واسطه

عناصری با عدد اتمی ۱۹ تا ۳۶، متعلق به تناوب چهارم بوده و اغلب آن‌ها فلز هستند. از میان این عناصر، زیرلایه $3d$ در عناصری با عدد اتمی ۲۹، ۳۰ و بالاتر از آن، کاملاً پر از الکترون است. تصویر زیر، آرایش الکترونی عناصر واسطه موجود در تناوب چهارم را نشان می‌دهد:



یکی از هدایای زمینی، سنگ‌های گران‌بهای موجود در آن است که رنگ‌های گوناگون و زیبایی دارد. فیروزه آبی، زمرد سبز و یاقوت قرمز از جمله آن‌ها هستند. علت ایجاد چنین رنگ‌هایی وجود ترکیبات فلزهای واسطه در این سنگ‌ها است. اغلب فلزهای واسطه در طبیعت به شکل ترکیبات یونی همچون اکسیدها، کربنات‌ها و ... یافت می‌شوند. برای نمونه، آهن، دو اکسید طبیعی با فرمول‌های FeO و Fe_2O_3 دارد.

اولین عنصری که قاعده آفبا در آرایش الکترونی آن به‌طور کامل رعایت نمی‌شود، فلز کروم است که پیش از پر شدن زیرلایه $4s$ در آن، زیرلایه $3d$ الکترون می‌گیرد. در آرایش الکترونی این عنصر ۵ الکترون با $n + l = 5$ (الکترون‌های زیرلایه $3d$) وجود دارد.

مقایسه واکنش‌پذیری عناصر داده شده به صورت مقابل است:

مس > آهن > پتاسیم

مقایسه عدد اتمی عناصر داده شده نیز به صورت: مس < آهن < پتاسیم است. بر این اساس، می‌توان گفت بین این عناصر فلزی، با افزایش مقدار عدد اتمی، واکنش‌پذیری کاهش یافته و تأمین شرایط مورد نیاز برای نگهداری فلز آسان‌تر می‌شود.

